

Del 1

1. $4x^3y - xy^3 = xy(4x^2 - y^2) = xy(2x - y)(2x + y)$

2. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

3. $3\sqrt{2}$

4. $\frac{5-i}{1+i} - (1+i)^2 = (\text{Förläng första termen med } 1-i) = 2 - 5i$.

5. $\lg(3x-2) = 2 \Rightarrow 3x-2 = 100 \Leftrightarrow x = 34$

6. Kvoten $k(x) = x-5$, resten $r(x) = 10x^2 + 15$.

7. $\frac{(3x-2) \cdot (x+1)}{x+3} < 0$, där $x \neq -3$ och nollställen är $x = \frac{2}{3}, x = -1$

Sätt $f(x) = \frac{(3x-2) \cdot (x+1)}{x+3}$

Teckenschema

| | | | | | | | |
|-----------------|---|-------|---|----|---|---------------|---|
| x | | -3 | | -1 | | $\frac{2}{3}$ | |
| $3x-2$ | - | 0 | - | | - | 0 | + |
| $x+1$ | - | | - | 0 | + | | + |
| $\frac{1}{x+3}$ | - | odef. | + | | + | | + |
| $f(x)$ | - | odef. | + | 0 | - | 0 | + |

Svar: $x < -3$ eller $-1 < x < \frac{2}{3}$

8. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2$ (1)

$$\sqrt{x+2} = 2 + \sqrt{x-6} \quad \text{Kvadrering ger } x+2 = 4 + 4\sqrt{x-6} + x-6 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x-6} = 1 \Leftrightarrow x = 7$$

En kontroll i ekv. (1) ger att $x = 7$ duger.

Svar: $x = 7$.

9. $\sin 3x = \sin 2x$

Vi får två fall:

1) $3x = 2x + n2\pi \Leftrightarrow x = n2\pi, n \in \mathbb{Z}$

2) $3x = \pi - 2x + n2\pi \Leftrightarrow 5x = \pi + n2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + n\frac{2\pi}{5}$.

10. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Gissning ger roten $x = 1$.

Polynomdivision med $x - 1$ ger ekvationen

$$(x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2, 3.$$

Svar: Ekvationen har rötterna $x_1 = 1, x_2 = 2$ och $x_3 = 3$.

Del 2

11. $\cos 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{3\pi}{4} + n2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\pi}{8} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

12. $2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}$.

13. $\frac{1}{x} - \frac{1}{a} = a \Leftrightarrow x = \frac{1}{a + \frac{1}{a}} = \frac{a}{a^2 + 1}$.

14. $\left(\frac{4^{\frac{2}{3}} \cdot (\sqrt{2})^3}{(8^{-1})^{\frac{4}{3}} \cdot 16}\right)^6 = \left(\frac{(2^2)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3}{((2^3)^{-1})^{\frac{4}{3}} \cdot 2^4}\right)^6 = \left(2^{\frac{1}{6}}\right)^6 = 2$

15. En cirkelskiva med medelpunkt i $(0, -5i)$ och radie 3.

16. $4x^2 + 12x + 4y^2 - 16y - 19 = 0$

Kvadratkomplettering ger

$$4\left(\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right) + 4((y-2)^2 - 4) = 19 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = 11$$

Svar: En cirkel med medelpunkt i punkten $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ och radie $\sqrt{11}$.

17. $4^{\frac{1}{x}-2} = \frac{3 - \ln e}{2} \quad \frac{4^{\frac{1}{x}}}{4^2} = \frac{3-1}{2} \Leftrightarrow 4^{\frac{1}{x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Svar: $x = 1$.

18. $3z - i\bar{z} - 7 + 5i = 0$

Med $z = x + iy$ och därmed $\bar{z} = x - iy$ får vi $3 \cdot (x + iy) - i(x - iy) = 7 - 5i$

Jämförelse av realdel och imaginärdel ger $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ -x + 3y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Svar: $z = 2 - i$.

19. $\ln 9 - \ln(x^2 - 4) = \ln(x - 2) - \ln(x + 2) \quad \lg(x + 3) = 2\lg(x - 2) + \lg(2/5) \quad (1)$

Logaritmregler ger

$$\ln 9 + \ln(x + 2) = \ln(x - 2) + \ln(x^2 - 4) \quad \text{som ger}$$

$$\ln(9 \cdot (x + 2)) = \ln((x - 2)(x^2 - 4))$$

$$\text{Vi får } 9 \cdot (x + 2) = (x - 2)(x^2 - 4) \Leftrightarrow (x + 2)((x - 2)^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + 2)(x^2 - 4x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = -2; -1; 5.$$

· En kontroll i ekv. (1) ger att rötterna -2 och -1 är falska.

Svar: $x = 5$.

20. Vänstra ledet = VL = $\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha \sin \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha(1 + \cos \alpha)} =$

$$= \frac{\sin \alpha(1 + \cos \alpha)}{\cos \alpha(1 + \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = HL. \quad \text{Klart.}$$

SLUT!