LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **LÖSNINGAR**
MATEMATIK **ALGEBRA**
Helsingborg **2021-04-08**

1. $x^2-7x+1=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2+1=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{45}{4}$..

2. $\left|x-6\right|>9 \Leftrightarrow x<-3$ eller $x>15$.

3. Linjens ekvation blir: $y-1=\frac{3-1}{-2-(-3)}\cdot(x-(-3)) \Leftrightarrow y=2x+7$.

4. $\frac{3^{2x}}{3^3}=81 \Leftrightarrow 3^{2x}=3^4 \Leftrightarrow 3^{2x}=3^7 \Leftrightarrow 2x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$.

5. $\sqrt{20}-\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{18}=2\sqrt{5}-\sqrt{5}+\sqrt{2}+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=\sqrt{5}$.

6. Vi löser ut b ur ekvationen $a\cdot(b-f)-f\cdot b=0 \Leftrightarrow ab-af-fb=0 \Leftrightarrow ab-fb=af$

$b(a-f)=af \Leftrightarrow b=\frac{af}{a-f}$

Vi sätter in $a=18$ och $f=6$ och får $b=\frac{18\cdot 6}{18-6}=\frac{18\cdot 6}{12}=\frac{18}{2}=9$

7. Kvoten är x^2+4x+2 och resten är $-2x+3$.

8. $\sin 2x+2\cos x=0 \Leftrightarrow 2\cos x\sin x+2\cos x=0 \Leftrightarrow 2\cos x(\sin x+1)=0$.

Vi får två ekvationer:

1) $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z$.

2) $1+\sin x=0 \Leftrightarrow \cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+n2\pi\ ,\ n\in Z$

Svar: $x=\pi+n2\pi\ ,\ n\in Z$

9. Enligt trigonometriska ettan har vi $\cos^2 v=1-\sin^2 v=1-\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2=\frac{5}{6} \Leftrightarrow \cos v=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}$.

$\Leftrightarrow \cos v=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}$ och $\cos 2v=\cos^2 v-\sin^2 v=\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2=\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

10. $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+3}=x$. Kvadreringen ger $(x-1)(x+3)=x^2 \Leftrightarrow$

$x^2+2x-3=x^2 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$. En kontroll ger att bara $x=\frac{3}{2}$ är en lösning.

Svar: $x=\frac{3}{2}$.

11. $e^{\ln 2} + \ln 32 - \ln 4 + \ln 8 - 4\ln 2 - \lg 100 = 2 + \ln 2^5 - \ln 2^2 + \ln 2^3 - 4\ln 2 - 2 = .$
$= 5\ln 2 - 2\ln 2 + 3\ln 2 - 4\ln 2 = 2\ln 2.$

12. $$\frac{\left(x-\frac{y^2}{x}\right)^2}{(y+x)^2}\cdot\frac{x}{x-y} = \left(\frac{x^2-y^2}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{(y+x)^2}\cdot\frac{x}{x-y} = \frac{\left(x^2-y^2\right)^2}{x^2}\cdot\frac{1}{(y+x)^2}\cdot\frac{x}{x-y} =$$
$$= \frac{(y+x)^2(x-y)^2}{x^2}\cdot\frac{1}{(y+x)^2}\cdot\frac{x}{x-y} = \frac{x-y}{x}.$$

13. $2\sin x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n2\pi$ eller $x = \pi - \frac{\pi}{4} + n2\pi = \frac{3\pi}{4} + n2\pi, n \in Z.$

Svar: $x = \frac{\pi}{4} + n2\pi$ eller $x = \frac{3\pi}{4} + n2\pi$, $n \in Z$

14. $\frac{5-2i}{(1-i)^2} = \frac{5-2i}{1-2i+i^2} = \frac{5-2i}{-2i} = \frac{(5-2i)\cdot i}{-2i\cdot i} = \frac{2+5i}{2} = 1 + \frac{5}{2}i.$

15. $|z-i| \leq 2$ är en cirkelskiva med MP: (0,1) och radien $\sqrt{2}$.

16. $2\lg(x-4) = \lg x + \lg 2 \Rightarrow \lg(x-4)^2 = \lg 2x$

Vi får $(x-4)^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 2, 8.$ En kontroll ger att $x = 2$ är en falsk rot.

Svar: $x = 8$.

17. $\frac{5}{x+1} - \frac{3x-12}{x^2-1} = 1$, $x \pm 1$. Gör liknämnigt

$\frac{5(x-1)-(3x-12)}{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x+7}{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + 7 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4, x = -2$

Svar: $x = 4$ eller $x = -2$.

18. $2x^2 - 4x + 3y^2 + 18y = -23 \Leftrightarrow 2(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 6y) = -23$

Kvadratkomplettering ger

$2\left((x-1)^2 - 1^2\right) + 3\left((y+3)^2 - 3^2\right) = -23 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 - 2 + 3(y+3)^2 - 27 = -23 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)^2}{6}+\frac{3(y+3)^2}{6}=1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y+3)^2}{2}=1.$$

Svar: En ellips med medelpunkten $(1,-3)$ och
halvaxlarna $a=\sqrt{2}$ och $b=\sqrt{3}$.

19. $3z-i\bar{z}=7-5i$

Med $z=x+iy$ och därmed $\bar{z}=x-iy$ får vi

$3(x+iy)-i(x-iy)=7-5i \Leftrightarrow 3x+3iy-ix+i^2y=7-5i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x-y+i(-x+3y)=7-5i$

Jämförelse av realdel och imaginärdel ger ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 3x-\ \ y=7 \\ -x+3y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Svar: $z=x+iy=2-i.$

20. $\dfrac{2x^2-4}{x+2} \geq x-1 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-4}{x+2}-(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-2}{x+2}\geq 0$.

Vi faktoruppdelar täljaren: $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=2, x=-1$. Vi får $\dfrac{(x-2)\cdot(x+1)}{x+2}\geq 0$

Sätt $f(x)=\dfrac{(x-2)\cdot(x+1)}{x+2}\geq 0$

Teckenschema

x		-2		-1		2	
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$+$
$x+1$	$-$		$-$		$+$		$+$
$x+2$	$-$		$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$-$	Odef.	$+$		$-$		$+$

Svar: $-2<x\leq -1$ eller $x\geq 2$.