Föreläsning 8

* Anmälan laboration 3 (och 4).
* Nytt miniprojekt!
* Repetition.
* Mer om p-värde.
* Flera stickprov.
    - Stickprov i par.
    - Oberoende stickprov.

Repetition

* Hypotestester.

Exempel: Är Kalle rattonykter?

x_1, x_2, x_3 är stickprov från $N(\mu, 0.07^2)$

μ är personens verkliga alkoholhalt.

X = "Uppmätt alkoholhalt" $\in N(\mu, 0.07^2)$

Om $\bar{x} = 0.27$, ska Kalle dömas?

Repetition

* Hypotestester.

Exempel: Är Kalle rattonykter?

x_1, x_2, x_3 är stickprov från $N(\mu, 0.07^2)$

μ är personens verkliga alkoholhalt.

$\bar{X}$ = "Uppmätt alkoholhalt" $\in N(\mu, 0.07^2)$

Om $\bar{x} = 0.27$, ska Kalle dömas?

H_0 : $\mu \leq 0.2$, oskyldig ("det vi ifrågasätter")

H_1 : $\mu > 0.2$, skyldig ("det vi vill troliggöra")

Vi förkastar H_0 om $\bar{x} > k$ där k bestäms utifrån α:

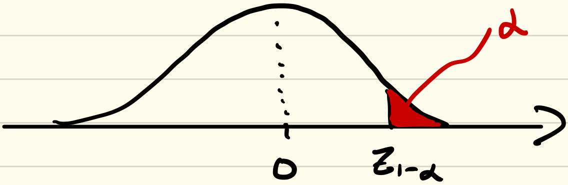
$\alpha = P($förkasta H_0 trots att H_0 är sann$] =$

$$= P(\bar{x} > k \text{ då } \mu = 0.2) \overset{\text{standardisera}}{=} P\Big(\underbrace{\frac{\bar{x} - 0.2}{\sigma/\sqrt{3}}}_{= Z \in N(0,1)} > \frac{k - 0.2}{\sigma/\sqrt{3}}\Big)$$

$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{k - 0.2}{\sigma/\sqrt{3}}\right) = \alpha$$

Repetition

$$P\left(Z > \frac{k-0.2}{\sigma/\sqrt{3}}\right) = \alpha$$



Alltså $\frac{k-0.2}{\sigma/\sqrt{3}} = z_{1-\alpha}$

$$\Rightarrow \quad k = 0.2 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{3}}$$

Om $\alpha = 0.05 \Rightarrow z_{0.95} = 1.645 \Rightarrow k = 0.267$.

Det betyder att om $\bar{x} > 0.267$ så förkastar vi H_0 och förklarar Kalle skyldig.

Om $\alpha = 0.01 \Rightarrow z_{0.99} = 2.326 \Rightarrow k = 0.294$ och vi kan inte förkasta H_0 och Kalle slipper straff.

Repetition

Vi hade också kunnat göra ett hypotestest med hjälp av konfidensintervall:

$$I_\mu = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$$

Om $\alpha = 0.05 \Rightarrow I_\mu = (0.2035, \infty)$

I_μ täcker ej 0.2 så H_0 förkastas med 95% säkerhet.

Om $\alpha = 0.01 \Rightarrow I_\mu = (0.1760, \infty)$

H_0 kan ej förkastas.

Repetition

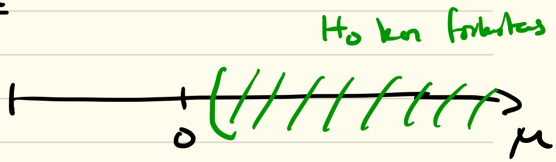
Vi lär oss tre sätt att testa hypoteserna.

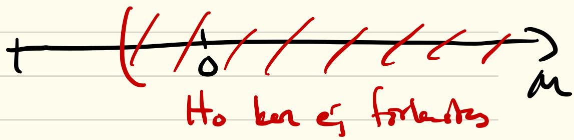
Alla ger samma slutsats men på lite olika sätt.

1) **Konfidensintervall:**

$H_0: \mu = 0$

$H_1: \mu > 0$





Om σ känd

$$I_\mu = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$$

Om σ okänd:

$$I_\mu = \left(\bar{x} - t_{1-\alpha, n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \infty\right)$$

+ Ger ett intervall i enheten (t.ex m, h, s, ...) man har mätt i.

Repetition

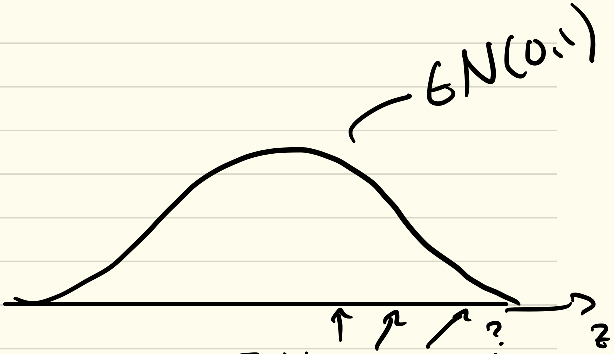
Teststorhet:

$H_0: \mu = 0$

$H_1: \mu > 0$

Om σ känd

$$z = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right|$$



Förklarar var vi hamnar på x-axeln

H_0 förkastas om

$$z > z_{1-\alpha}$$

Om σ okänd:

$$t = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right|$$

Förkasta H_0 om $t > t_{1-\alpha, n-1}$

+ Använd vi styrkefunktionen.

Enkel att komma ihåg – standardisera enligt H_0:s normalfördelning.

Repetition

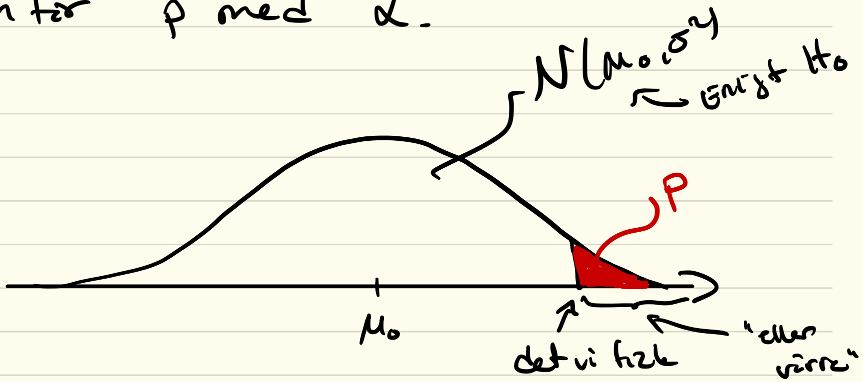
P-värde (Direktmetoden)

Beräknar:

$p = P(\text{"Att få det vi fick eller 'värre'"} \mid H_0 \text{ är sann})$

p ger den nivån vi kan förkasta H_0 på.

Jämför p med α.



Om $p \leq \alpha$ så kan vi förkasta H_0 på nivån α. Vi kan faktiskt förkasta H_0 på nivån p.

Repetition

* **Styrkefunktion:** Svarar på frågan:
  "Vad är sannolikheten att förkasta H_0 om det sanna μ är $\bar{\mu}$".

Exempel: Om Kalles verkliga alkoholhalt var $\mu = 0.25$. Vad är då sannolikheten att vi förkaster H_0?

Repetition

* **Styrkefunktion:** Svarar på frågan:
"Vad är sannolikheten att förkasta H_0 om det sanna μ är $\bar{\mu}$".

Exempel: Om Kalles verkliga alkohol-halt var $\mu = 0.25$. Vad är då sannolikheten att vi förkastar H_0?

Lösning: Enligt H_0 så är $\bar{X} \in N(0.2, 0.07^2)$

$$P(\text{"}H_0 \text{ förkastas"} \mid \mu = 0.25) = P(\bar{X} > k \mid \mu = 0.25)$$

$$= P\left(\bar{X} > 0.2 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid \mu = 0.25\right)$$

Repetition

* **Styrkefunktion:** Svarar på frågan:
"Vad är sannolikheten att förkasta H_0 om det sanna μ är $\bar{\mu}$".

Exempel: Om Kalles verkliga alkohol-halt var $\mu = 0.25$ vad är då sannolikheten att vi förkaster H_0?

Lösning: Enligt H_0 så är $\bar{X} \in N(0.20, 0.07^2)$

$$P(\text{"}H_0 \text{ förkastas"} \mid \mu = 0.25) = P(\bar{X} > k \mid \mu = 0.25)$$

$$= P\Big(\bar{X} > \underbrace{0.2 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{= 0.267 \text{ om } \alpha = 0.05} \Bigm| \mu = 0.25\Big)$$

$$= P(\bar{X} > 0.267 \mid \mu = 0.25) \overset{\text{standardisera}}{=} P\left(\frac{\bar{X} - 0.25}{\frac{0.07}{\sqrt{3}}} > \frac{0.267 - 0.25}{\frac{0.07}{\sqrt{3}}}\right)$$

$$= 1 - \Phi(0.4206) = 0.337$$

Svar: Det är ca 34% chans att förkasta H_0 om $\mu = 0.25$.

Uppgift

En läkemedelstillverkare använder en viss livsmedelsfärg. Man vill veta hur färgen påverkar utseendet på läkemedlet. Man möter grumligheten på 10 slumpmässigt valda tabletter och medelvärdet på grumligheten blev $\bar{x} = 4.1$

Utan färgämnet bruker grumligheten vara $\mu = 4.0$.

Modell: Slumpmässigt stickprov från $N(\mu, 0.2^2)$.

a) Pröva hypotesen $H_0: \mu = 4.0$

$H_1: \mu > 4.0$.

med $\alpha = 0.05$.

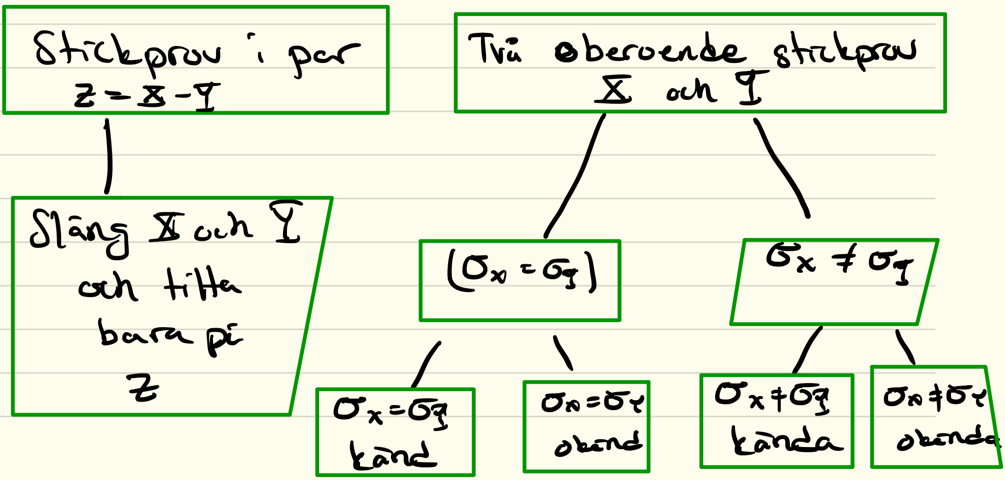
b) Beräkna styrkefunktionen för testet.

Vad är styrkefunktionens värde för $\mu = 3.8$ och $\mu = 4.3$?

Två stickprov (Kap 7)

Nu ska vi studera situationen då man vill jämföra två experiment med varandra. T.ex: Har en medicin någon effekt? Vi mäter effekten på några patienter som tar medicinen och jämför med personer som inte tar den.

Vi ska titta på två huvudgrupper:



EXEMPEL: Ökar alkoholkonsumtion fetthalten i levern? Man valde ut 12 försökspersoner, vilka kan betraktas som ett slumpmässigt urval bland friska personer i 25-årsåldern. Försökspersonerna har under en längre tid avstått från all alkoholkonsumtion och prover på deras levrar tagits. Därefter har de fått dricka 4 burkar öl per dag och efter en månad har nya leverprover tagits. Följande leverfetter erhölls:

Person nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Före	0.25	0.19	0.13	0.23	0.15	0.14	0.24	0.23	0.17	0.15	0.10	0.17
Efter	0.5	0.28	0.18	0.18	0.34	0.41	0.33	0.26	0.35	0.42	0.22	0.29
Differens Efter-före	0.25	0.09	0.05	−0.05	0.19	0.27	0.09	0.03	0.18	0.27	0.12	0.12

Modell: X = FÖRÄNDRINGEN i fetthalt $\sim N(\mu, \sigma^2)$
vilket är en rimlig modell när man tittar på en Q-Q plot över differenserna.

Sätt upp lämpliga hypoteser och testa om dessa data stöder misstanken att alkoholkonsumtion ökar fetthalten i levern.

Stickprov i par

Exempel: Fetthalt i lever.

X = "Förändringen (efter - före)" $\in N(\mu, \sigma^2)$

$H_0 : \mu = 0$ Alkohol påverkar ej.

$H_1 : \mu > 0$ Alkohol ökar fetthalten.

Från datan får vi $\bar{x} = 0.1342$, $s = 0.1008$

Stickprov i par

Exempel: Fetthalt i lever.

X = "Förändringen (efter − före)" $\in N(\mu, \sigma^2)$

$H_0 : \mu = 0$ Alkohol påverkar ej.

$H_1 : \mu > 0$ Alkohol ökar fetthalten.

Från datan får vi $\bar{x} = 0.1342$, $s = 0.1008$

Teststorhet

Om σ vore känt:

$$z = \frac{\bar{x} - 0}{\sigma/\sqrt{12}}$$ och förkasta H_0 på nivå $\alpha = 0.05$

om $z > z_{0.95}$ $(= 1.645)$

Om σ okänd:

$$t = \frac{\bar{x} - 0}{s/\sqrt{12}}$$ och förkasta H_0 på nivån $\alpha = 0.05$

om $t > t_{0.95,11}$ $(= 1.796)$

För vårt exempel: $t = \dfrac{0.1342 - 0}{0.1008/\sqrt{12}} = 4.61$

Då $4.61 > t_{0.95,11}$ förkastar vi H_0 på nivå 0.05.

$(t_{0.999,11} = 4.025$ och $4.61 > t_{0.999,11})$!

Stickprov i par

Konfidensintervall

Vi undersöker $H_0: \mu = 0$
$H_1: \mu > 0$

Så vi gör ett nedåt begränsat intervall för μ

$$I_\mu = \left(\bar{x} - t_{1-\alpha, 11} \frac{s}{\sqrt{12}}, \infty \right)$$

Med $\alpha = 0.001$ får vi: $t_{0.99, 11} = 4.025$

$$I_\mu = \left(0.1342 - 4.025 \frac{0.1008}{\sqrt{12}}, \infty \right)$$

$$= (0.0176, \infty)$$

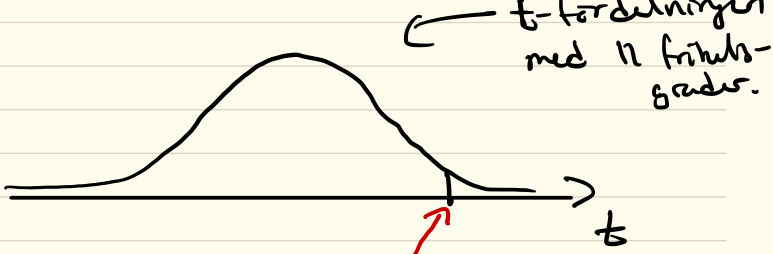
H_0 kan förkastas på nivå $\alpha = 0.001$.

Stickprov i par

P-värde

Om H_0 är sann så gäller:

$$t = \frac{\bar{x} - 0}{s/\sqrt{12}} \quad \text{är } t\text{-fördelad}$$



$$t = \frac{0.1342 - 0}{0.1008/\sqrt{12}} = 4.61$$

$p = P(t > 4.61) =$ "Arean till höger om 4.61 i t-fördelningen med 11 frihetsgrader"

$= [\text{dator}] = 0.00037 =$ p-värdet.

Vi kan alltså förkasta H_0 på nivån 0.00037.

P-värde (igen)

Varför använda p-värde?

* Anger felrisken direkt.

* Anges ofta i datorutskrifter då man genomför tester (R, Matlab etc.)

* Smidigt att använda i situationer då man inte kan normalapproximera.

ANVÄNDNING AV p-VÄRDE NÄR VI INTE KAN NORMALAPPROXIMERA:

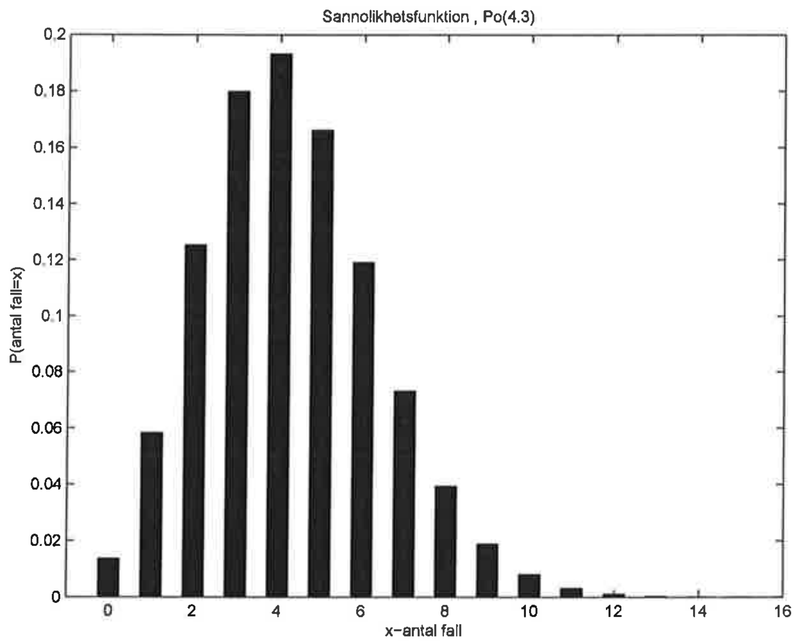
EXEMPEL: I ett område, beläget nära ett raffinarderi, inträffade under en 5-årsperiod 10 fall av leukemi mot "förväntade" 4.3 fall. Är området mer drabbat än resten av landet? För en "ovanlig" sjukdom kan ofta variationen i antalet sjukdomsfall beskrivas med en poissonfördelning.

Modell: X **=antal leukemifall i området** $\sim$ $\boldsymbol{Po}(\lambda)$

$$H_0 : \lambda = 4.3$$

$$H_1 : \lambda > 4.3$$

OM H_0 **är sann gäller att** $X \sim \boldsymbol{Po}(4.3)$



Vi observerade $x = 10$ **fall. Hur troligt är det i en** $\boldsymbol{Po}(4.3)$**?**

Två oberoende stickprov

Nu ska vi titta på situationen där vi vill undrsöka:

$H_0: \mu_x = \mu_y$

$H_1: \mu_x \neq \mu_y$ eller $\mu_x > \mu_y$ elr $\mu_x < \mu_y$

där $X \in N(\mu_x, \sigma_x^2)$ och $Y \in N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

Skillnaden nu från "Stickprov i par" är att det inte finns någon blart beroende mellan två motsvarande mätningar i X och Y. Till exempel

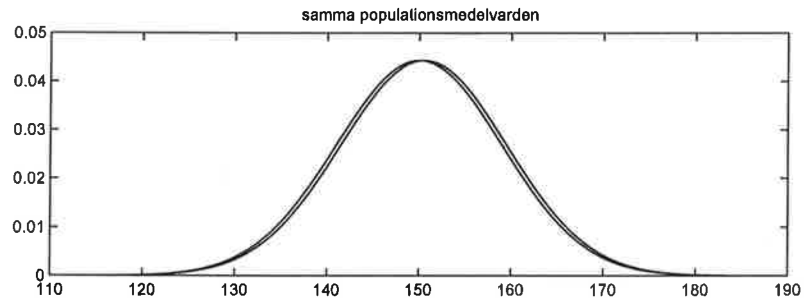
X_3 och Y_3.

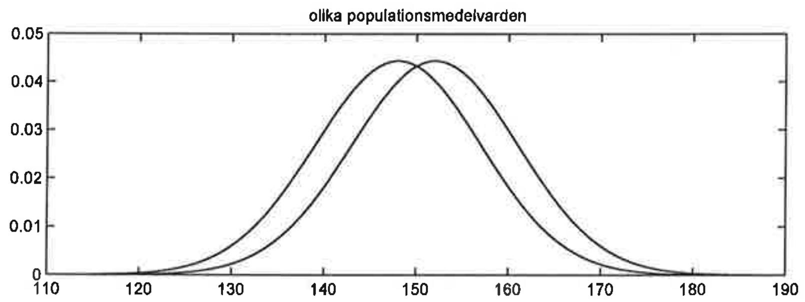
JÄMFÖRELSE MELLAN BEHANDLINGAR:

EXEMPEL: För att undersöka om en viss medicin har som primär biverkan att förändra ett visst levervärde mäts detta — dels på 50 personer som ej behandlats med medicinen dels på 25 personer som behandlats med medicinen. Resultat:

Behandling	Medelvärde	Standardavvikelse	*n* antal
Utan medicin	148.2	10.0	50
Med medicin	151.7	8.0	25

Kan man dra några slutsatser om att medicinen påverkar levervärdet?





Två oberoende stickprov

U = "Utan medicin" , M = "Med medicin"

$U \in N(\mu_U, \sigma^2)$, $M \in N(\mu_M, \sigma^2)$.

Vi antar här att U och M har samma

varians (standardavvikelse).

Vi vill testa:

$H_0: \mu_U = \mu_M$ Ingen skillnad mellan behandlingar

$H_1: \mu_U \neq \mu_M$ Skillnad mellan behandlingar.

Två oberoende stickprov

U = "Utan medicin" , M = "Med medicin"

$U \in N(\mu_U, \sigma^2)$, $M \in N(\mu_M, \sigma^2)$

Vi antar här att U och M har samma varians (standardavvikelse).

Vi vill testa:

$H_0: \mu_U = \mu_M$ Ingen skillnad mellan behandlingar

$H_1: \mu_U \neq \mu_M$ Skillnad mellan behandlingar.

Konfidensintervall för $\mu_U - \mu_M$:

$$I_{\mu_U - \mu_M} = \left(\hat{\mu}_U - \hat{\mu}_M \pm \text{"kvantil"} \sqrt{Var(\hat{\mu}_U - \hat{\mu}_M)}\right)$$

Skattningen av $\hat{\mu}_U - \hat{\mu}_M$ är $\bar{x}_U - \bar{x}_M$.

$$Var(\hat{\mu}_U - \hat{\mu}_M) = Var(\bar{U} - \bar{M}) \overset{\text{oberoende}}{=} Var(\bar{U}) + Var(\bar{M})$$

$$= \frac{\sigma^2}{n_U} + \frac{\sigma^2}{n_M} = \sigma^2\left(\frac{1}{n_U} + \frac{1}{n_M}\right)$$

Två oberoende stickprov

$$I_{\mu_v - \mu_m} = \left(\hat{\mu}_v - \hat{\mu}_m \pm \text{"kvantil"} \sqrt{Var(\hat{\mu}_v - \hat{\mu}_m)} \right)$$

Så $\sqrt{Var(\hat{\mu}_v - \hat{\mu}_m)} = \sigma \sqrt{\frac{1}{n_v} + \frac{1}{n_m}}$

Hur skattar vi σ?

Två oberoende stickprov

$$I_{\mu_v - \mu_m} = \left(\hat{\mu}_v - \hat{\mu}_m \pm \text{"kvantil"} \sqrt{Var(\hat{\mu}_v - \hat{\mu}_m)} \right)$$

Så $\sqrt{Var(\hat{\mu}_v - \hat{\mu}_m)} = \sigma \sqrt{\frac{1}{n_v} + \frac{1}{n_m}}$

Hur skattar vi σ?

Jo, genom att vikta ihop våra mätningar:

$$s^2 = \frac{(n_v - 1) s_v^2 + (n_m - 1) s_m^2}{n_v + n_m - 2}$$

Två oberoende stickprov

$$I_{\mu_u-\mu_m} = \left(\hat{\mu}_u - \hat{\mu}_m \pm \text{"kvantil"} \sqrt{Var(\hat{\mu}_u - \hat{\mu}_m)}\right)$$

Så $\sqrt{Var(\hat{\mu}_u - \hat{\mu}_m)} = \sigma\sqrt{\frac{1}{n_u} + \frac{1}{n_m}}$

Hur skattar vi σ?

Jo, genom att vikta ihop våra mätningar:

$$s^2 = \frac{(n_u-1)s_u^2 + (n_m-1)s_m^2}{n_u+n_m-2}$$

Så vårt intervall blir:

$$I_{\mu_u-\mu_m} = \left(\bar{x}_u - \bar{x}_m \pm t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}\, s\sqrt{\frac{1}{n_u}+\frac{1}{n_m}}\right)$$

I vårt fall:

$\bar{x}_u = 148.2$ $\quad s_u^2 = 100$ $\quad n_u = 50$ $\quad \alpha = 0.05$

$\bar{x}_m = 151.7$ $\quad s_m^2 = 64$ $\quad n_m = 25$

$t_{0.975, 73} = 1.99$

$$I_{\mu_u-\mu_m} = (-8.0769, 1.0769)$$

Kan ej förkasta H_0 ty $I_{\mu_u-\mu_m}$ täcker 0.

Två oberoende stickprov

(överkurs)

* Vad händer om $X \in N(\mu_X, \sigma_X^2)$ och $Y \in N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ där $\sigma_X \neq \sigma_Y$ när vi vill testa

$H_0: \quad \mu_X = \mu_Y$

$H_1: \quad \mu_X \neq \mu_Y$

Två oberoende stickprov

(överkurs)

* Vad händer om $X \in N(\mu_X, \sigma_X^2)$ och $Y \in N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ där $\sigma_X \neq \sigma_Y$ när vi vill testa

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$
$$H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$$

---

* Lite svårare nu: (överkurs)

$$Var(\bar{X} - \bar{Y}) = \frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}$$

som skattas till $\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}$

Eftersom vi skattat σ_X och σ_Y med s_X och s_Y så måste vi använda t-fördelningen. Hur många frihetsgrader?

Två oberoende stickprov

(överkurs)

Antalet frihetsgrader blir nu ungefär:

$$f = \frac{\left[s_x^2/n_x + s_y^2/n_y \right]^2}{\frac{\left[s_x^2/n_x \right]^2}{n_x - 1} + \frac{\left[s_y^2/n_y \right]^2}{n_y - 1}} \qquad (*)$$

Om både n_x och n_y är stora så kan man förenkla $(*)$ till:

$$f = \min(n_x - 1, n_y - 1)$$

Två oberoende stickprov

* Ett bra sätt att testa om $\sigma_X = \sigma_Y$ är att ställa upp följande hypotes och testa:

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$

$$H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

Två oberoende stickprov

* Ett bra sätt att testa om $\sigma_X = \sigma_Y$ är att ställa upp följande hypotes och testa:

$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

$H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

Man kan visa att $\frac{S_X^2}{S_Y^2}$ tillhör F-fördelningen, dvs.

$$\frac{S_X^2}{S_Y^2} \in F_{(n_x-1),(n_y-1)}$$

Vi förkastar H_0 om $\frac{S_X^2}{S_Y^2} > F_{1-\alpha/2,(n_x-1),(n_y-1)}$

Sammanfattning

Utgångspunkt: $X \in N(\mu_x, \sigma_x^2)$

$H_0: \mu_x - \mu_y = 0$ $\qquad Y \in N(\mu_y, \sigma_y^2)$

$H_1: \mu_x - \mu_y \neq 0$ (eller >0 eller <0)

1) Kan man se X_k och Y_k som parvisa mätningar?

Ja! • Låt $Z_k = X_k - Y_k$ (eller $Y_k - X_k$)

$Z_k \in N(\Delta, \sigma_z^2)$

- Sätt upp hypotes.
- Testa. Om σ_z känd, använd normalkvantil $z_{1-\alpha}$ ($z_{1-\alpha/2}$ om dubbelsidigt)

  Om σ_z okänd skatta med s_z, använd t-kvantil $t_{1-\alpha, n-1}$ ($t_{1-\alpha/2, n-1}$ om dubbelsidigt).

Sammanfattning

Nej! Alltså inte parvisa!

- σ_x och σ_y kända:

  Testa med normalkvantil och med varians

  $$\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}$$

- σ_x och σ_y okända:

  - Kan man anta att $\sigma_x = \sigma_y$?

    Ja! Testa med t-kvantil med

    $n_x + n_y - 2$ frihetsgrader och med

    varians: $s^2\left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)$

    där $s^2 = \frac{(n_x-1)s_x^2 + (n_y-1)s_y^2}{n_x + n_y - 2}$

Sammanfattning

Nej! (överkurs) σ_x och σ_y antas vara olika.

- Testa med t-kvantil med

$$f = \frac{\left[s_x^2/n_x + s_y^2/n_y \right]^2}{\frac{\left[s_x^2/n_x \right]^2}{n_x - 1} + \frac{\left[s_y^2/n_y \right]^2}{n_y - 1}} \quad \text{frihetsgrader}$$

och varians $\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}$.

Sammanfattning

Hur ser konfidensintervallen ut för de olika scenarierna? Antag att variansen är okänd (annars använd normalkvantil), konfidensnivå α, samt att vi tester:

$$H_0: \quad \mu_x - \mu_y = 0$$
$$H_1: \quad \mu_x - \mu_y \neq 0$$

Parvis stickprov: $Z_k = X_k - Y_k \in N(\Delta, \sigma_z^2)$

$$I_\Delta = \left(\bar{x} - t_{1-\alpha/2, n-1} \cdot \frac{s_z}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{s_z}{\sqrt{n}} \right)$$

Två oberoende stickprov:

Antag $\sigma_x = \sigma_y$

$$I_{\mu_x - \mu_y} = \left(\bar{x} - \bar{y} \pm t_{1-\alpha/2, n_x + n_y - 2} \, s\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \right)$$

med $$s^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{n_x + n_y - 2}$$

Sammanfattning

Två oberoende stickprov: (överkurs)

Antag $\sigma_x \neq \sigma_y$

$$I_{\mu_x - \mu_y} = \left(\bar{x} - \bar{y} \pm t_{1-\alpha/2,\, f} \sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}} \right)$$

med

$$f = \frac{\left[s_x^2/n_x + s_y^2/n_y \right]^2}{\frac{\left[s_x^2/n_x \right]^2}{n_x - 1} + \frac{\left[s_y^2/n_y \right]^2}{n_y - 1}} \quad \text{frihetsgrader}$$

Uppgifter

1. Man har två kemiska förningar, A och B. Man tror att deras molekylvikter är lika. Man mätte förning A 6 gånger och fick $\bar{x}_A = 174.27$ och $s_A^2 = 0.062423^2$ och man mätte förning B 8 gånger och fick $\bar{x}_B = 174.28$ och $s_B^2 = 0.091486^2$.
Mätmetoden man använde har ett fel $N(0, \sigma^2)$ och anses ge oberoende fel.
Testa, på $\alpha = 0.05$:

H_0: A och B har samma molekylvikt

H_1: A och B har olika molekylvikt.

Uppgifter

2. Åtta personer mäter sin egen längd (i cm) på morgonen och kvällen. Resultaten är:

Person	1	2	3	4	5	6	7	8
Morgon	172	168	180	181	160	163	165	177
Kväll	172	167	177	179	159	161	166	175

Skillnaderna anses vara slumpmässiga stickprov från $N(\mu, \sigma)$. Pröva:

$H_0 : \mu = 0$

$H_1 : \mu \neq 0$

på signifikansnivå $\alpha = 0.05$.