Föreläsning 7

* Miniprojekt 1.
* Amälan till Laboration 3 och 4.
* Frågestund/repetition
* Mozquizto test 1 - deadline idag!

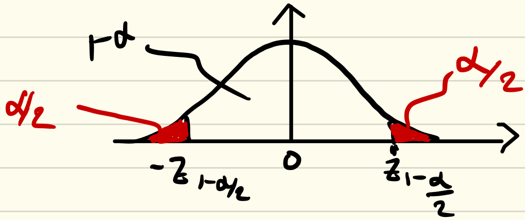
Outline

* Repetition.
* Hypotestest.
* Test och konfidensintervall
* p-värdet hos ett test.
* Styrkan hos ett test.

Repetition

* Konfidensintervall för μ med $\alpha = 0.05$, täcker det sanna värdet för μ med sannolikheten $1-\alpha = 0.95$.

* Två fall:



- σ känd:

$$I_\mu = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

- σ okänd och skattad till s

$$I_\mu = \left(\bar{x} - t_{1-\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} , \bar{x} + t_{1-\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

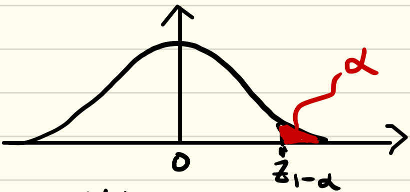
Där $z_{1-\alpha/2}$ är kvantilen i normalfördelningen med $1-\alpha/2$ arean till vänster om sig och $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ är motsvarande kvantil för t-fördelningen.

Repetition

- Demo-time!

Repetition

* Konfidensintervallen kan också vara ensidiga.



- σ känd (uppåt begränsad)

$$I_\mu = \left(-\infty\,,\ \bar{x} + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

- σ känd (nedåt begränsad)

$$I_\mu = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ \infty\right)$$

- σ okänd (uppåt begränsad)

$$I_\mu = \left(-\infty\,,\ \bar{x} + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

- σ okänd (nedåt begränsad)

$$I_\mu = \left(\bar{x} - t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\,,\ \infty\right)$$

Notera att vi nu har α istället för α/2.

Uppgifter

1. Man har ett slumpmässigt stickprov från $N(\mu, 2^2)$:

   44.3 45.1 46.1 45.3

   Ange ett 95%-konfidensintervall för μ.
   Hur ser ett 99%-konfidensintervall ut?

2. Samma som i 1 fast nedåt begränsat.

3. Man mäter 10 gånger från $N(\mu, \sigma^2)$:

   7.3 7.2 7.8 7.1 8.0 6.9 7.5 8.1
   7.7 7.5.

   Beräkna ett 95% konfidensintervall för μ.

BIOSTATISTISK GRUNDKURS, MASB11
OH-BILDER 6

EXEMPEL (rattonykterhet): Gräns för rattonykterhet är 0.2 promille. Vid en trafikkontroll görs tre bestämningar av alkoholhalten i blodet.

Modell: De tre mätningarna x_1, x_2, x_3 antas vara ett stickprov från en s.v. (personens uppmätta alkoholhalt) som antas vara normalfördelat $N(\mu,\ 0.07^2)$ där μ är personens verkliga alkoholhalt och 0.07 är ett mått på mätinstrumentets precision.
I kortform:
X**=uppmätt alkoholhalt;** $X \in N(\mu,\ 0.07^2)$

För Kalle blev $\bar{x} = 0.27$ (promille). Ska han dömas för rattonykterhet? Detta kan vi hantera m.h.a. konfidensintervall!

NÅGRA INTRESSANTA FRÅGOR SOM ÄR SVÅRA ATT BESVARA M.H.A. KONFIDENSINTERVALL:

(a) **Antag att Kalles alkoholhalt är $\mu = 0.25$ (rattonykter), hur stor är sannolikheten att vi, med tekniken ovan, ska upptäcka att han är rattonykter och därmed förklara honom skyldig?**

(b) **Vi ska göra n mätningar av alkoholhalten. Antag att vi har ett krav som säger att om Kalle har en alkoholhalt på $\mu = 0.3$ så ska vi förklara honom skyldig med stor sannolikhet (t.ex. 0.99). Hur många mätningar ska vi ta för att kravet ska vara uppfyllt?**

(c) **Medelvärdet av Kalles tre mätningar är 0.27. Antag att vi förklarar honom skyldig, vad är då den exakta felrisken? Tydligen ligger den mellan 1 % och 5 %.**

Dessa frågor kan besvaras med hjälp av hypotesprövning!

Hypotesprövning

Exempel: Kalle.

x_1, x_2, x_3 observationer av X = "alkoholhalt"

$X \sim N(\mu, 0.07^2)$

$\bar{x} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = 0.27.$

Kan vi med säkerhet säga att

$\mu > 0.2$ (dvs. Kalle är skyldig)?

Hypotesprövning

Exempel: Kalle.

x_1, x_2, x_3 observationer av X = "alkoholhalt"

$X \sim N(\mu, 0.07^2)$

$\bar{x} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = 0.27.$

Kan vi med säkerhet säga att

$\mu > 0.2$ (dvs. Kalle är skyldig)?

Vi gör ett 95% konfidensintervall.

Då vi är intresserade av ifall $\mu > 0.2$
så gör vi ett nedåt begränsat intervall för μ.

$$I_\mu = \left(\bar{x} - z_{0.95}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right) = (0.2035, \infty)$$

Hypotesprövning

Exempel: Kalle.

x_1, x_2, x_3 observationer av X = "alkoholhalt"

$X \sim N(\mu, 0.07^2)$

$\bar{x} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = 0.27.$

Kan vi med säkerhet säga att

$\mu > 0.2$ (dvs. Kalle är skyldig)?

Vi gör ett 95% konfidensintervall.

Då vi är intresserade av ifall $\mu > 0.2$
så gör vi ett nedåt begränsat intervall för μ.

$I_\mu = (\bar{x} - z_{0.95} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty) = (0.2035, \infty)$

Eftersom I_μ ej täcker 0.2 med 95% säkerhet förklarar vi Kalle skyldig.

Men vi har 5% risk att felaktigt döma Kalle. Vad händer om vi minskar felrisken till 1%?

Hypotesprövning

99% konfidensintervall:

$$I_\mu = \left(\bar{x} - z_{0.99} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right) = (0.1760, \infty)$$

Om vi vill ha 99% säkerhet så kan Kalle ej dömas!

HYPOTESPRÖVNING – GRUNDLÄGGANDE BEGREPP

- **Bestäm en passande sannolikhetsmodell och formulera hypoteser, nollhypotes (H_0) respektive mothypotes (H_1).**
- **Identifiera testregel och form på kritiskt område, d.v.s. område där H_0 förkastas.**
- **Bestäm vilka sannolikheter för felslut man kan acceptera:**

  P(**fel av typ I**) $=$ P(**förkasta** $H_0 \mid H_0$ **är sann**) $= \alpha$ **kallas testets felrisk.**

  P(**fel av typ II**) $=$ P(**förkasta *inte*** $H_0 \mid H_1$ **är sann**) $= \beta$,
  $1 - \beta$ **benämns testets styrka.**
- **Bestäm kritiskt område.**
- **Samla in data, dra slutsatser.**

TÄNKBARA FELSLUT:

	H_0 sann Kalle oskyldig	H_1 sann Kalle skyldig
H_0 förkastas ej Kalle går fri	OK!	P(fel av typ II)= 1− testets styrka
H_0 förkastas Kalle döms	P(fel av typ I) = α (testets felrisk)	OK!

Hypotesprövning

Exempel: Kalle (mer ordentligt!)

H_0 : $\mu \leq 0.2$, oskyldig ("det vi ifrågasätter")

H_1 : $\mu > 0.2$, skyldig ("det vi vill troliggöra")

Vi förkastar bara H_0 om H_0 är osannolik. Men vad är gränsen för när H_0 är osannolik?

Hypotesprövning

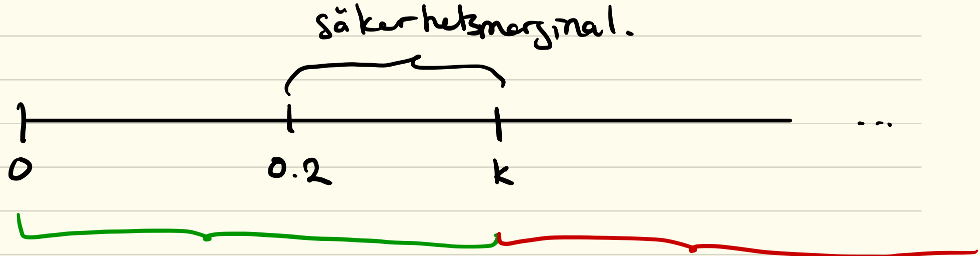
Exempel: Kalle (mer ordentligt!)

H_0 : $\mu \leq 0.2$, oskyldig ("det vi ifrågasätter")

H_1 : $\mu > 0.2$, skyldig ("det vi vill troliggöra")

Vi förkastar bara H_0 om H_0 är osannolik. Men vad är gränsen för när H_0 är osannolik?

Vi förkaster H_0 om $\bar{x} > k$



Här går Kalle fri!

Här förkastas H_0 och Kalle förklaras skyldig!

Hur bestämmer vi k?

Hypotesprövning

Vi bestämmer k utifrån vårt valda α.

$$\alpha = P(\text{"Kalle döms fast oskyldig"})$$
$$= P(\text{"}H_0 \text{ förkastas fast } H_0 \text{ sann"})$$
$$= P(\bar{X} > k \text{ då } \mu = 0.2)$$
$$= P\left(\frac{\bar{X} - 0.2}{\sigma/\sqrt{3}} > \frac{k - 0.2}{\sigma/\sqrt{3}} \right)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - 0.2}{\sigma/\sqrt{3}} \in N(0,1).$$

Vad är $P\left(Z > \frac{k-0.2}{\sigma/\sqrt{3}}\right)$?

Hypotespröuning

Vi bestämmer k utifrån vårt valda α.

α = P("Kalle döms fast oskyldig")

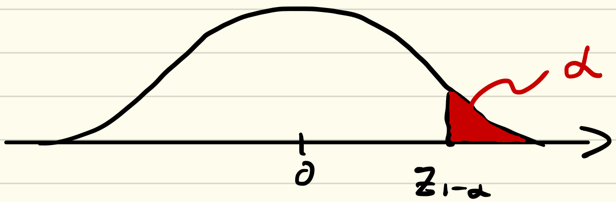
= P("H_0 förkastas fast H_0 sann")

$= P(\bar{X} > k$ då $\mu = 0.2)$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-0.2}{\sigma/\sqrt{3}} > \frac{k-0.2}{\sigma/\sqrt{3}}\right)$$

$$Z = \frac{\bar{X}-0.2}{\sigma/\sqrt{3}} \in N(0,1).$$

Vad är $P\left(Z > \frac{k-0.2}{\sigma/\sqrt{3}}\right)$?



Alltså H_0 förkastas om $\frac{\bar{X}-0.2}{\sigma/\sqrt{3}} > z_{1-\alpha}$

där α är testets felrisk (signifikansnivå).

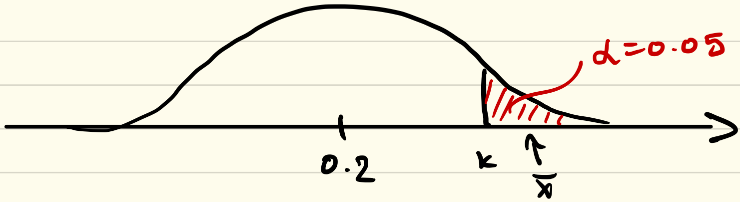
$\left(k = 0.2 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{3}}\right)$. (Bekant?)

Hypotesprövning

Om nu $\bar{x} = 0.27$, $n = 3$ och $\sigma = 0.07$

$\underline{\alpha = 0.05}$

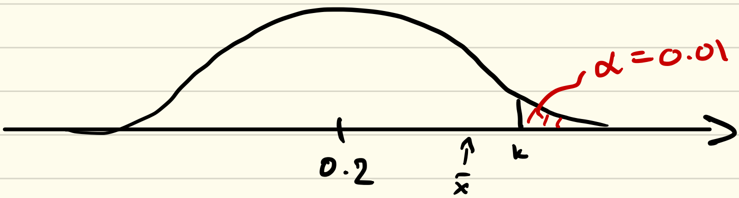
$$k = 0.2 + z_{0.95}\frac{\sigma}{\sqrt{3}} = 0.267 < \bar{x}$$



Kalle döms

$\underline{\alpha = 0.01}$

$$k = 0.2 + z_{0.99}\frac{\sigma}{\sqrt{3}} = 0.294 > \bar{x}$$

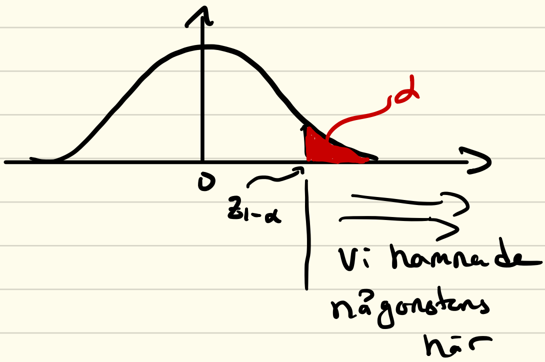


Kalle frias.

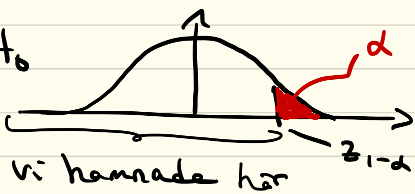
Hypotesprövning

Vi kommer kunna dra ett av två slutsatser från ett test:

* H_0 förkastas till förmån av H_1 på nivå α. Vi riskerar således att förkasta ett sant H_0 med sannolikhet α.



* H_0 kan ej förkastas. Datan var ej tillräckligt olik H_0



Hypotesprövning

OBS! H_0 kan ej förkastas $\cancel{\Rightarrow}$ H_0 är sann.

Exempel: Man ser ett djur

H_0: häst

H_1: ej en häst.

Test: Om antal ben är annat än 4 så förkastar vi H_0.

Data: Djuret har 4 ben.

Slutsats: H_0 kan ej förkastas.

Men detta betyder inte nödvändigtvis att djuret är en häst! (Elefanter, får och grisar har också 4 ben t.ex.)

SAMBAND KONFIDENSINTERVALL - HYPOTESPRÖVNING

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Gör ett konfidensintervall, I_μ, med konfidensgrad $1 - \alpha$ för μ.

I_μ täcker ej över $\mu_0 \Leftrightarrow H_0$ förkastas på nivå α.

I_μ täcker över $\mu_0 \Leftrightarrow H_0$ kan ej förkastas på nivå α.

ALTERNATIVT

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Gör ett nedåt begränsat konfidensintervall, I_μ, med konfidensgrad $1 - \alpha$ för μ.

I_μ täcker ej över $\mu_0 \Leftrightarrow H_0$ förkastas på nivå α.

I_μ täcker över $\mu_0 \Leftrightarrow H_0$ kan ej förkastas på nivå α.

Hypotesprövning

Tre sätt att testa en hypotes:

Hypotesprövning

Tre sätt att testa en hypotes:

1) Konfidensintervall

$$I_\mu = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right) \text{ om } \sigma \text{ känd}$$

eller

$$I_\mu = \left(\bar{x} - t_{1-\alpha}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \infty\right) \text{ om } \sigma \text{ okänd}$$

Förkasta H_0 om $\mu_0 \notin I_\mu$.

Hypotesprövning

Tre sätt att testa en hypotes:

1) **Konfidensintervall**

$$I_\mu = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \infty \right) \quad \text{om } \sigma \text{ känd}$$

eller

$$I_\mu = \left(\bar{x} - t_{1-\alpha}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}},\ \infty \right) \quad \text{om } \sigma \text{ okänd}$$

Förkasta H_0 om $\mu_0 \notin I_\mu$.

2) **Teststorhet:**

σ känd: $T_\sigma = \left| \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right|$, σ okänd $T_s = \left| \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right|$

Förkasta H_0 om $T_\sigma > \lambda_{1-\alpha}$

$T_s > t_{1-\alpha}(n-1)$

Hypotesprövning

Tre sätt att testa en hypotes:

1) **Konfidensintervall**

$$I_\mu = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right) \quad \text{om } \sigma \text{ känd}$$

eller

$$I_\mu = \left(\bar{x} - t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \infty\right) \quad \text{om } \sigma \text{ okänd}$$

Förkasta H_0 om $\mu_0 \notin I_\mu$.

2) **Teststorhet:**

σ känd: $T_\sigma = \left|\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|$, σ okänd $T_s = \left|\dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right|$

Förkasta H_0 om $T_\sigma > \lambda_{1-\alpha}$

$T_s > t_{1-\alpha}(n-1)$

3) p-värdet (direktmetoden)

Beräknar α genom

$$\alpha = P(\text{"Få det man fick eller värre"} \mid \text{"}H_0 \text{ sann"}).$$

Exempel:

Säg att varje radonmätning är

X = "radonhalt i huset" $\in N(\mu, \sigma^2)$.

Vi vill uttala oss om värdet för μ.

Vi skattar μ genom medelvärdet:

$\bar{x} = 198 \ Bq/m^3$ med $n = 10$.

Antag (skumt nog) att vi vet att

$\sigma^2 = 9$. Vi vill testa:

$H_0: \ \mu > 200.$

$H_1: \ \mu \leq 200.$

Vi vill alltså göra ett uppåt begränsat

test. Sätt $\alpha = 0.05$.

Lösning:

Konfidensintervall:

$$I_\mu = \left(-\infty,\ \bar{x} + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(-\infty,\ 198 + 1.645\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= (-\infty,\ 199.56)$$

Eftersom 200 inte ligger i I_μ så kan H_0 förkastas på $\alpha = 0.05$.

Lösning:

Konfidensintervall:

$$I_\mu = \left(-\infty,\ \bar{x} + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(-\infty,\ 198 + 1.645\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= \left(-\infty,\ 199.56\right)$$

Eftersom 200 inte ligger i I_μ så kan H_0 förkastas på $\alpha = 0.05$.

Teststorhet:

$$\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{10}}}\right| = \left|\frac{198 - 200}{\frac{3}{\sqrt{10}}}\right| = 2.1082$$

Då $2.1082 > z_{1-0.05} = 1.645$ så kan vi förkasta H_0 på $\alpha = 0.05$.

Lösning:

Konfidensintervall:

$$I_\mu = \left(-\infty,\ \bar{x} + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(-\infty,\ 198 + 1.645\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= (-\infty,\ 199.56)$$

Eftersom 200 inte ligger i I_μ så kan H_0 förkastas på $\alpha = 0.05$.

Teststorhet:

$$\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{10}}}\right| = \left|\frac{198 - 200}{\frac{3}{\sqrt{10}}}\right| = 2.1082$$

Då $2.1082 > z_{1-0.05} = 1.645$ så kan vi förkasta H_0 på $\alpha = 0.05$.

p-värde

$\alpha = P($"Få det man fick eller värre" | "H_0 sann"$) =$

$$= P(\bar{X} \leq 198 \mid \mu_0 = 200) = \Phi\left(\frac{198-200}{\frac{3}{\sqrt{10}}}\right)$$

$$= \Phi(-2.1082) = 1 - \Phi(2.1082) = 0.0175.$$

Testets styrka

* När man utför ett test så kan man göra två fel:

    1) Förkasta H_0 när H_0 är sann.

    2) Inte förkasta H_0 när H_0 är falsk.

* Sannolikheten för 1 är α och för 2 β.

Testets styrka

* När man utför ett test så kan man göra två fel:

  1) Förkasta H_0 när H_0 är sann.

  2) Inte förkasta H_0 när H_0 är falsk.

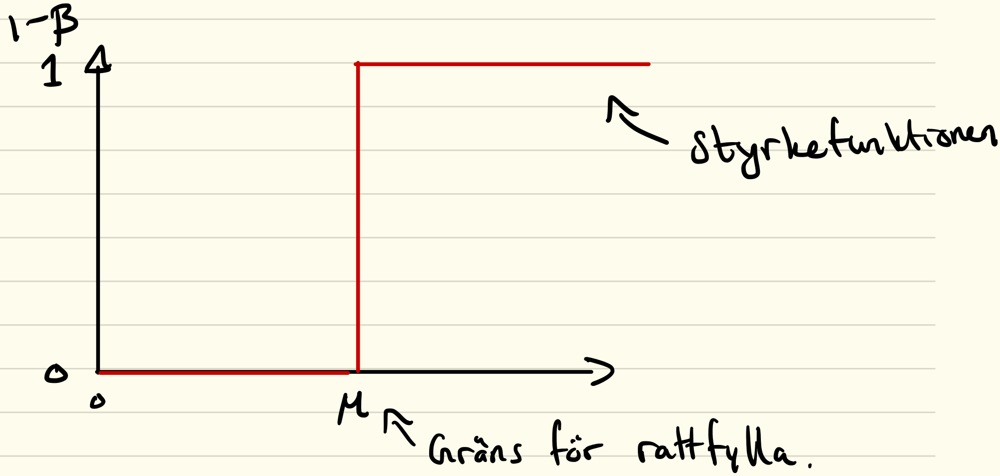
* Sannolikheten för 1 är α och för 2 β.

	H_0 är sann	H_0 är falsk
Förkasta inte H_0	Rätt beslut. $1-\alpha$	Fel typ II β
Förkasta H_0	Fel typ I α	Rätt beslut $1-\beta$

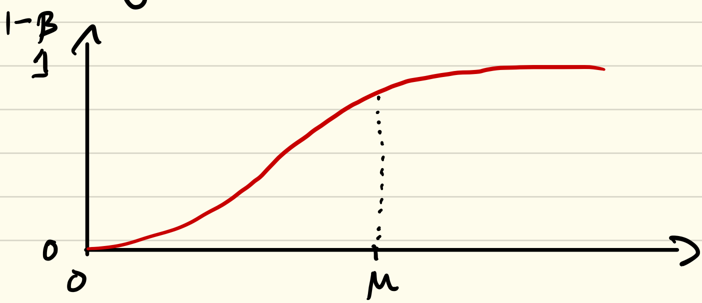
Man bruker kalla $1-\beta$ för styrkan av ett test.

Testets styrka

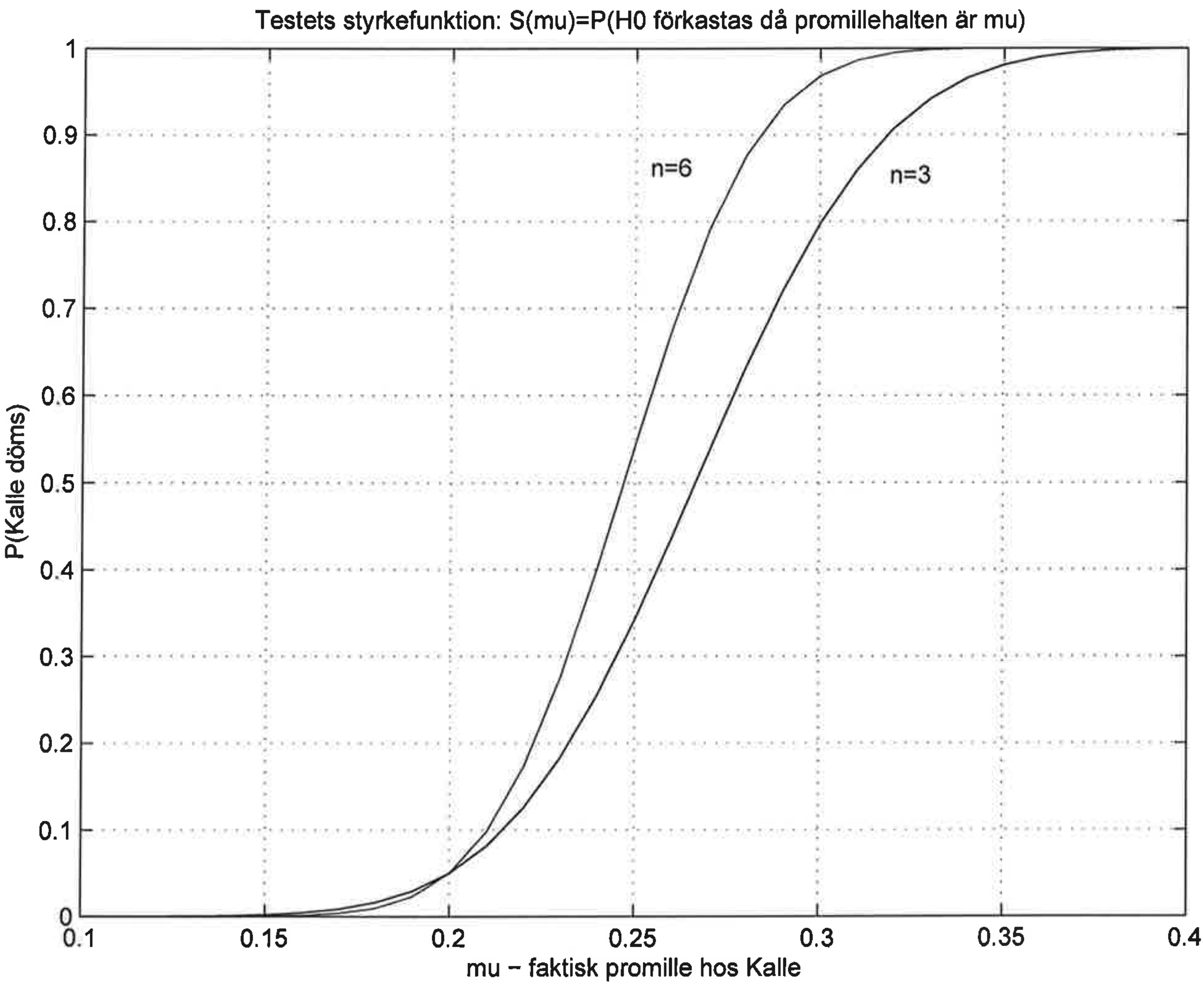
I fallet med Kalle så vill vi att styrkan ska vara:



* Detta är tyvärr orealistiskt. Vi brukar få något liknande



TESTETS STYRKEFUNKTION:
$S(\mu) = P($**Kalle förklaras skyldig | Kalles promillehalt är** $\mu)$

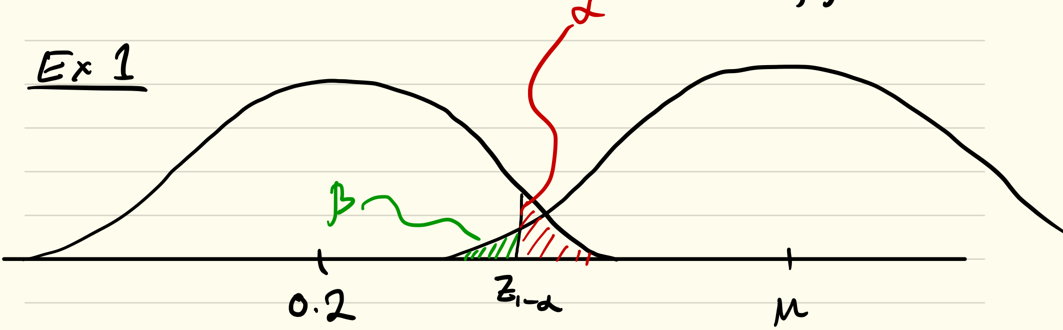


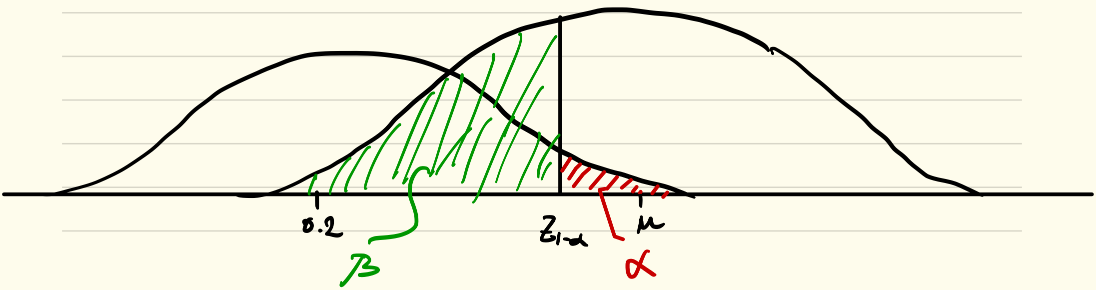
Testets styrka

Styrkefunktionen beror på:

* Sanna värdet på μ.
* Stickprovsstorleken n.
* Variansen σ^2.
* Ju lägre α, ju sämre styrka. (Trade-off mellan α och $1-\beta$).

Ex 1





Uppgift

En läkemedelstillverkare använder en viss livsmedelsfärg. Man vill veta hur färgen påverkar utseendet på läkemedlet. Man mäter grumligheten på 10 slumpmässigt valda tabletter och medelvärdet på grumligheten blev $\bar{x} = 4.1$

Utan färgämnet brukar grumligheten vara $\mu = 4.0$.

Modell: Slumpmässigt stickprov från $N(\mu, 0.2^2)$.

a) Pröva hypotesen $H_0: \mu = 4.0$, $H_1: \mu > 4.0$. med $\alpha = 0.05$.

b) Beräkna styrkefunktionen för testet.

Vad är styrkefunktionens värde för $\mu = 3.8$ och $\mu = 4.3$?