2019-03-27
Johan Swärd

Föreläsning 2

Repetition från förra föreläsningen:

* Slumpmässigt försök.
* Utfall
* Händelser - ett eller flera utfall.

Exempel: Tärning.

Slumpmässigt försök: Tärningskast.
Utfallsrum: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Exempel på händelser:

A = "Få en 3:a"

B = "Få högst en 3:a"

= "Att få en 1:a, 2:a eller en 3:a"

Exempel: Tärning.

Slumpmässigt försök: Tärningskast

Utfallsrum: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Exempel på händelser:

A = "Få en 3:a"

B = "Högst en 3:a"

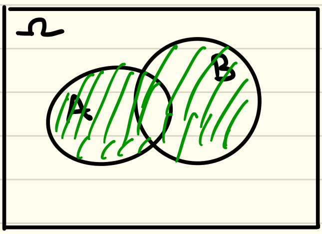
$P(A) = 1/6$

$P(B) = 3/6 = 1/2$

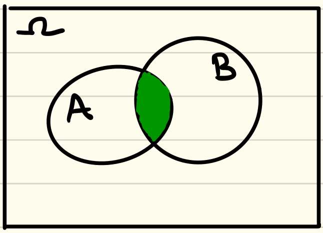
---

* Mer om Venn-diagram

Union: $P(A \cup B)$ = "Sannolikheten att A eller B eller båda sker"

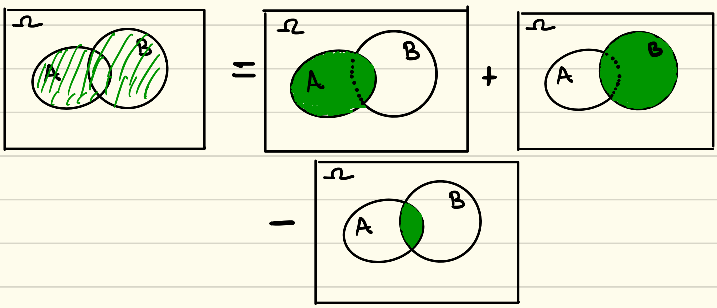


* Snitt: $P(A \cap B)$ = "Sannolikheten att A och B sker"



* Additionssatsen.

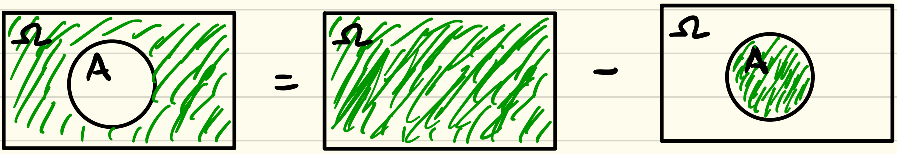
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Repetition

* Komplemet.

$$P(\bar{A}) = P(\text{"Ej } A\text{"}) = P(\Omega) - P(A)$$
$$= 1 - P(A)$$



Om $A =$ "Få en 3:a". Då är

$P(\bar{A}) =$

$= P(\text{"Få antingen en 1:a, 2:a, 4:a, 5:a, 6:a"})$

$= 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = \frac{5}{6}$

Eller (enklare)

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 1/6 = \frac{5}{6}$.

Repetition

* **Oberoende:**

Om C och D är oberoende då gäller

$$P(C \cap D) = P(C)\,P(D)$$

Exempel: På ett Roulette-hjul finns det 37 numrerade fack i tre olika färger; svart, röd och grön.
Det finns 18 svarta, 18 röda och ett grönt fack. Vad är sannolikheten att få två röda fack i två spel i rad?

* Betingad sannolikhet

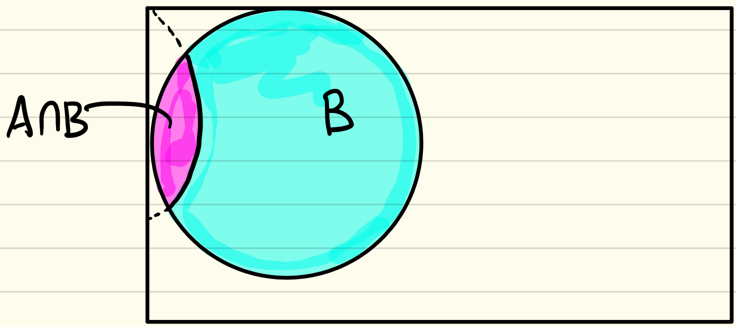
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

"Sannolikheten att A händer givet att B har hänt".

Detta kallas betingad sannolikhet

Tips: Man kan tolka detta som areor:

"Hur stor del av B utgörs av A?"



Exempel: (Från övningen (uppgift 2.22))

I en stor undersökning konstaterade man att 20% av en population hade kärlsjukdom medan 60% var rökare. Det var 15% i gruppen som både rökte och hade kärlsjuka.

a) Beräkna den betingade sannolikheten att en rökare är kärlsjuk.

b) Beräkna den betingade sannolikheten att en kärlsjuk är rökare.

c) Verkar de två faktorerna oberoende?

Repetition

* Multiplikationssatsen:

$$\boxed{P(A|B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \boxed{\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}}$$

Bayes sats.

45 bilister åkte fast för fortkörning vid skolorna i S:t Lars-parken. "Det är föräldrarna själva som kör för fort. De har för bråttom", konstaterar polisassistent Patrik Kvist.

Stressade föräldrar fast i fartkontroll

45 bilister togs för fortkörning vid de två hastighetskontrollerna.

Varannan fortkörare vid S:t Lars var en förälder som skulle till skolan.

LUND. Lärare och föräldrar på skolorna i S:t Lars-parken har klagat på att många struntar i 30-gränsen. Igår morse slog polisen till mot fartsyndarna.

Mer än varannan fortkörare var en förälder som skulle lämna sina barn vid skolan.

Scenen upprepas varje morgon utanför nästan alla svenska skolor:

Klockan är strax efter åtta. Stressade föräldrar, redan sena till jobbet, bromsar in framför skolan och lämnar av sina barn

Pappan Hans Karlsson, här med sonen Oscar, välkomnar hastighetskontrollerna utanför Lunds skolor. "Jag kör alltid i max 30 kilometer i timmen", säger han.

körde bara igenom området, nå-

kontroller utanför skolor i Lund

Beskriv hur det ser ut här en vanlig morgon?

– Det är föräldrar som kör med barn i framsätet, de stannar inte vid övergångsställena, många kör i 50, ibland upp till 70 kilometer i timmen, faktiskt.

Vad ska man göra för att komma tillrätta med fortkörningen?

– Ha kontroller härnere oftare. Och, framför allt, information till oss föräldrar.

Inte alltid rent samvete

Karin Jönsson skjutsar sina tre barn plus en pojke till. Hon slipper också böter denna septembermorgon, något hon är glad för:

– Ja, det skulle kännas pin-

26 av dem var föräldrar som skulle lämna eller hade lämnat sina barn på någon av skolorna i området.

Exempel:

45 bilister åkte fast för fortkörning vid skolorna i S:t Lars-parken. "Det är föräldrarna själva som kör för fort. De har för bråttom", konstaterar polisassistent Patrik Kvist.

Stressade föräldrar fast i fartkontroll

Varannan fortkörare vid S:t Lars var en förälder som skulle till skolan.

LUND. Lärare och föräldrar på skolorna i S:t Lars-parken har klagat på att många struntar i 30-gränsen. Igår morse slog polisen till mot fartsyndarna.

Mer än varannan fortkörare var en förälder som skulle lämna sina barn vid skolan.

Scenen upprepas varje morgon utanför nästan alla svenska skolor:

Klockan är strax efter åtta. Stressade föräldrar, redan sena till jobbet, bromsar in framför skolan och lämnar av sina barn.

Pappan Hans Karlsson, här med sonen Oscar, välkomnar hastighetskontrollerna utanför Lunds skolor. "Jag kör alltid i max 30 kilometer i timmen", säger han.

Beskriv hur det ser ut här en vanlig morgon?

– Det är föräldrar som kör med barn i framsätet, de stannar inte vid övergångsställena, många kör i 50, ibland upp till 70 kilometer i timmen, faktiskt.

Vad ska man göra för att komma tillrätta med fortkörningen?

– Ha kontroller härnere oftare. Och, framför allt, information till oss föräldrar.

Inte alltid rent samvete

Karin Jönsson skjutsar sina tre barn plus en pojke till. Hon slipper också böter denna septembermorgon, något hon är glad för:

45

45 bilister togs för fortkörning vid de två hastighetskontrollerna.

26

26 av dem var föräldrar som skulle lämna eller hade lämnat sina barn på någon av skolorna i området.

Vid kontrollen togs 45 bilister för fortkörning. 26 av dem var föräldrar som skulle lämna sina barn.

Polisassistenten Patriks slutsats är enkel och tydlig: "Det är föräldrarna själva som kör fortast." Har polismannen rätt i sin slutsats?

F = "vara förälder"

K = " köra för fort"

45 bilister åkte fast för fortkörning vid skolorna i S:t Lars-parken. "Det är föräldrarna själva som kör för fort. De har för bråttom", konstaterar polisassistent Patrik Kvist.

Stressade föräldrar fast i fartkontroll

Varannan fortkörare vid S:t Lars var en förälder som skulle till skolan.

LUND. Lärare och föräldrar på skolorna i S:t Lars-parken har klagat på att många struntar i 30-gränsen. Igår morse slog polisen till mot fartsyndarna.

Mer än varannan fortkörare var en förälder som skulle lämna sina barn vid skolan.

Scenen upprepas varje morgon utanför nästan alla svenska skolor:

Klockan är strax efter åtta. Stressade föräldrar, redan sena till jobbet, bromsar in framför

Pappan Hans Karlsson, här med sonen Oscar, välkomnar hastighetskontrollerna utanför Lunds skolor. "Jag kör alltid i max 30 kilometer i timmen", säger han.

Beskriv hur det ser ut här en vanlig morgon?

– Det är föräldrar som kör med barn i framsätet, de stannar inte vid övergångsställena, många kör i 50, ibland upp till 70 kilometer i timmen, faktiskt.

Vad ska man göra för att komma tillrätta med fortkörningen?

– Ha kontroller härnere oftare. Och, framför allt, information till oss föräldrar.

Inte alltid rent samvete

Karin Jönsson skjutsar sina tre barn plus en pojke till. Hon slipper också böter denna septembermorgon, något hon är glad för:

45

45 bilister togs för fortkörning vid de två hastighetskontrollerna.

26

26 av dem var föräldrar som skulle lämna eller hade lämnat sina barn på någon av skolorna i området.

Polismannen uttalar sig om

$P(K|F)$

men vi har bara data om

$P(F|K)$.

För att ta reda på $P(K|F)$ så behöver vi

$$P(K|F) = \frac{P(F|K)P(K)}{P(F)}$$

men vi har varken $P(K)$ eller $P(F)$.

Dagens lektion:

* Kombinatorik
* Diskreta slumpvariabler.
* Fördelningar
* Två standardfördelningar
    - Binomialfördelningen
    - Poissonfördelningen
* Väntevärde och varians.
* Tentafråga
* Sammanfattande probem

Kombinatorik

Behandlar kombinationer, permutationer och uppräkningar.

På hur många sätt kan man ordna n olika element?

Exempel: A, B och C kan ordnas på

1. ABC
2. ACB
3. BAC
4. BCA
5. CAB
6. CBA

eller $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ sätt.

Vi skriver att n olika element kan ordnas på

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n! \text{ sätt}$$

Uttalas "n-fakultet".

Kombinatorik

Exempel: Hur många sätt kan man blanda en kortlek?

Svar: $52!$ $(\approx 8 \cdot 10^{67})$

Ibland är man intresserad av att räkna ut hur många sätt man kan välja ut k element från totalt n element.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exempel: Om du väljer 5 kort av 52, hur många olika händer kan du få?

Svar: $\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\ 47!} = 2\,598\,960$

Kombinatorik

Exempel: På hur många sätt kan man få 10 rätt på en tipspromenad med 13 frågor?

Kombinatorik

Exempel: På hur många sätt kan man få 10 rätt på en tipspromenad med 13 frågor?

Lösning:

$n = 13$, $k = 10$

$$\binom{n}{k} = \frac{13!}{10!\,(13-10)!} = \frac{1\cdot 2 \cdot \cdots 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdots 9 \cdot 10\,(1 \cdot 2 \cdot 3)}$$

$$= \frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 11 \cdot 2 \cdot 13 = 286$$

Svar: Det kan ske på 286 sätt.

Slumpvariabler

Vid ett slumpmässigt försök är man intresserad av:

X - slumpvariabel (stokastisk variabel)

Detta är en variabel som beskriver försöket och kan anta alla utfallen i utfallsrummet med en viss sannolikhet.

Med vilken sannolikhet X antar de olika utfallen beskrivs av en fördelning.

Exempel: Tärningskast.

X = "Antal prickar" (Diskret)

Exempel: Blodsockerhalten (mmol/l)

på en slumpmässig vald person ur en population.

X = "Blodsockerhalten" (Kontinuerlig)

Slumpvariabel

Det finns två olika sorter slumpvariabler:

Diskret: Antar ändligt eller uppräknerligt antal värden.

Kontinuerligt: Antar oändligt antal värden i ett intervall.

Exempel: Diskret eller kontinuerligt?

a) Krona/klave?

b) Antal stjärnor i universum?

c) Tiden det tar för vinnaren att komma i mål i Vasa-loppet (s)?

d) Vikten av en myra (mg)?

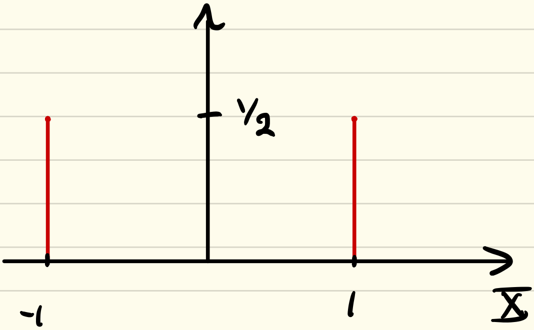
Slumpvariabel

Exempel:

Krona / klave : Diskret!

$$X = \begin{cases} 1, & \text{om krona} \\ -1, & \text{om klave} \end{cases}$$

$P(X=1) = 1/2$ $\quad$ $P(X=-1) = 1/2$

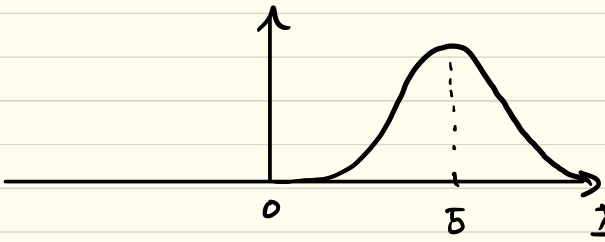


Slumpvariabel

Exempel:

Vikten av en myra. Kontinuerlig!

$$X = \begin{cases} ? \end{cases}$$



$P(X = 5)$?

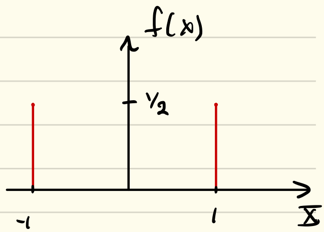
Kontinuerliga variabler är svårare att hantera. Vi sparar det till nästa gång.

Diskret slumpvariabel

För att beskriva med vilken sannolikhet X antar de olika utfallen använder vi:

Sannolikhetsfunktionen:

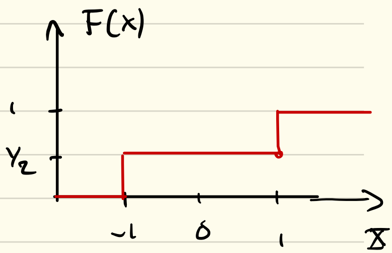
$$f_X(x) = P(X = x)$$



och

Fördelningsfunktionen:

$$F_X(x) = P(X \le x)$$



Notera att:

$$F_X(x) = \sum_{x_i \le x} f_X(x_i)$$

Viktigt!!!

$$\sum_{\text{alla } x} f(x) = 1 \qquad F(\infty) = 1$$

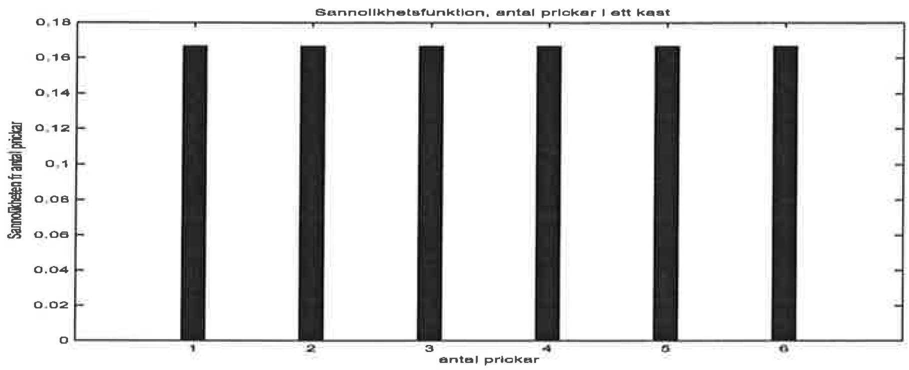
EXEMPEL ”Den klassiska tärningen”: Kasta en symmetrisk tärning.

Sannolikhetsmodell:

P(tärning ger x)$=\frac{1}{6}$, $x = 1, \ldots, 6$

Annat skrivsätt: X - tärningens utfall

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}, \; x = 1, \ldots, 6$$



- Vad är sannolikheten att få minst femma?

- Vad är sannolikheten för att få högst en tvåa?

- Vad förväntar vi oss att få för resultat på tärningen ”i genomsnitt”?

Diskret slumpvariabel

Vid många slumpmässiga försök använder man "familjer" av fördelningar, så kallade standardfördelningar. Några viktiga diskreta standardfördelningar är:

* Poisson-fördelningen – $Po(\lambda)$
* Binomialfördelningen – $Bin(n, p)$

Poissonfördelningen

Vi använder Poissonfördelningen när vi vill veta hur många gånger något händer under ett visst intervall.

Exempel:

a) Antal jordbävningar under 100 år.

b) Antal gjorda mål i en hockeymatch

c) Antal besökare i en affär under en dag.

Poissonfördelningen

För att det ska vara en Poissonfördelning måste följande vara uppfyllt:

1) Det sker i snitt μ händelser per tidsenhet.

2) Antal händelser i icke överlappande intervall är oberoende

3) Två händelser kan ej hända exakt samtidigt

Då gäller:

X = "Antal händelser på tidsintervall med längden t"

$$X \in Po(\mu t) = Po(\lambda)$$

Tillhör

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

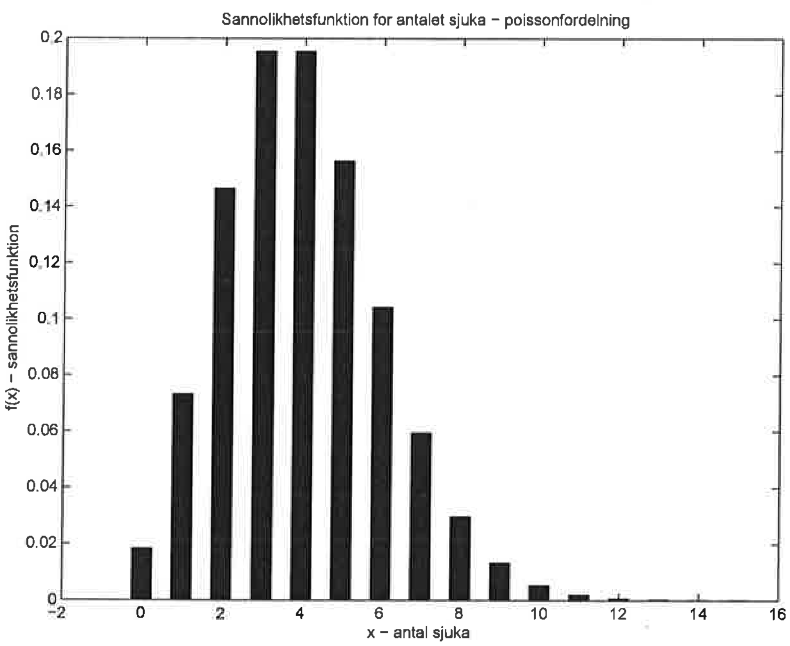
EXEMPEL: För ett antal år sedan slog en lundaläkare larm att i ett område i Lund, beläget i närheten av en kemisk industri, var antalet fall av en sällsynt cancersjukdom ovanligt stort. I det aktuella området hade nio personer (sex kvinnor och tre män) drabbats av sjukdomen under en femårsperiod. Då läkaren studerade det rikstäckande cancerregistret såg han att i en population lika stor som den i det aktuella området borde man under denna femårsperiod förväntat sig att antalet sjukdomsfall skulle vara fyra.

Modell: X = antalet sjuka i området under femårsperioden
P(precis x sjuka)=P(X =x)=f(x)=

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

där λ är det förväntade antalet sjuka, d.v.s. λ =4.

X är Poissonfördelad med $\lambda = 4; X \in Po(4)$



- Vad är sannolikheten att man observerar precis 5 sjuka?
- Vad är sannolikheten att man observerar högst 2 sjuka?
- Vad är sannolikheten att man observerar 9 eller fler sjuka?

Tabell 5. Poissonfördelningen

$P(X \leq x)$ där $X \in Po(\mu)$

x	μ 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.90484	0.81873	0.74082	0.67032	0.60653	0.54881	0.49659	0.44933	0.40657
1	0.99532	0.98248	0.96306	0.93845	0.90980	0.87810	0.84420	0.80879	0.77248
2	0.99985	0.99885	0.99640	0.99207	0.98561	0.97688	0.96586	0.95258	0.93714
3	1.00000	0.99994	0.99973	0.99922	0.99825	0.99664	0.99425	0.99092	0.98654
4	1.00000	1.00000	0.99998	0.99994	0.99983	0.99961	0.99921	0.99859	0.99766
5	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99996	0.99991	0.99982	0.99966
6	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99998	0.99996
7	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

x	μ 1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
0	0.36788	0.30119	0.24660	0.20190	0.16530	0.13534	0.11080	0.09072	0.07427
1	0.73576	0.66263	0.59183	0.52493	0.46284	0.40601	0.35457	0.30844	0.26738
2	0.91970	0.87949	0.83350	0.78336	0.73062	0.67668	0.62271	0.56971	0.51843
3	0.98101	0.96623	0.94627	0.92119	0.89129	0.85712	0.81935	0.77872	0.73600
4	0.99634	0.99225	0.98575	0.97632	0.96359	0.94735	0.92750	0.90413	0.87742
5	0.99941	0.99850	0.99680	0.99396	0.98962	0.98344	0.97509	0.96433	0.95096
6	0.99992	0.99975	0.99938	0.99866	0.99743	0.99547	0.99254	0.98841	0.98283
7	0.99999	0.99996	0.99989	0.99974	0.99944	0.99890	0.99802	0.99666	0.99467
8	1.00000	1.00000	0.99998	0.99995	0.99989	0.99976	0.99953	0.99914	0.99851
9	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99998	0.99995	0.99990	0.99980	0.99962
10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99998	0.99996	0.99991
11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99998
12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

x	μ 2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4
0	0.06081	0.04979	0.04076	0.03337	0.02732	0.02237	0.01832	0.01500	0.01228
1	0.23108	0.19915	0.17120	0.14684	0.12569	0.10738	0.09158	0.07798	0.06630
2	0.46945	0.42319	0.37990	0.33974	0.30275	0.26890	0.23810	0.21024	0.18514
3	0.69194	0.64723	0.60252	0.55836	0.51522	0.47348	0.43347	0.39540	0.35945
4	0.84768	0.81526	0.78061	0.74418	0.70644	0.66784	0.62884	0.58983	0.55118
5	0.93489	0.91608	0.89459	0.87054	0.84412	0.81556	0.78513	0.75314	0.71991
6	0.97559	0.96649	0.95538	0.94215	0.92673	0.90911	0.88933	0.86746	0.84365
7	0.99187	0.98810	0.98317	0.97693	0.96921	0.95989	0.94887	0.93606	0.92142
8	0.99757	0.99620	0.99429	0.99171	0.98833	0.98402	0.97864	0.97207	0.96420
9	0.99934	0.99890	0.99824	0.99729	0.99598	0.99420	0.99187	0.98887	0.98511
10	0.99984	0.99971	0.99950	0.99919	0.99873	0.99807	0.99716	0.99593	0.99431
11	0.99996	0.99993	0.99987	0.99978	0.99963	0.99941	0.99908	0.99863	0.99799
12	0.99999	0.99998	0.99997	0.99994	0.99990	0.99983	0.99973	0.99957	0.99934
13	1.00000	1.00000	0.99999	0.99999	0.99997	0.99996	0.99992	0.99987	0.99980
14	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99999	0.99998	0.99997	0.99994
15	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99998
16	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

Binomialfördelning

Binomialfördelningen uppstår då man gör n oberoende försök och räknar antalet som "lyckades".

I ett försök sker A eller ej ($\bar{A}$).

$P(A) = p$, $P(\bar{A}) = 1-p$ och vi gör n oberoende försök.

X = "Antal gånger A sker på den n försöken"

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, \ldots, n$$

Exempel:

Vi gör $n=10$ försök. $P(X = 0)$?

Binomialfördelning

Binomialfördelningen uppstår då man gör n oberoende försök och räknar antalet som "lyckades".

I ett försök sker A eller ej ($\bar{A}$).

$P(A) = p$, $P(\bar{A}) = 1-p$ och vi gör n oberoende försök.

X = "Antal gånger A sker på de n försöken"

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, \dots, n$$

Exempel:

Vi gör $n = 10$ försök. $P(X = 0)$?

Lösning:

Inga av de n försöken lyckas:

$$(1-p)(1-p)\cdots(1-p) = (1-p)^{10}$$

$P(X=1)$? Ett försök lyckas. Det finns 10 försök som kan ha lyckats dvs.

$$10 \cdot p(1-p)^9$$

Binomialfördelning

Exempel: Kasta en tärning 20 gånger.

a) Vad är sannolikheten att få 4 3:or?

b) Vad är sannolikheten att få högst 4 3:or?

Binomialfördelning

Exempel: Kasta en tärning 20 gånger.

a) Vad är sannolikheten att få 4 3:or?

b) Vad är sannolikheten att få högst 4 3:or?

Lösning:

Definiera slumpvariabel:

X = "Antal 3:or".

Definiera fördelning:
Eftersom vi gör $n = 20$ oberoende försök
så är

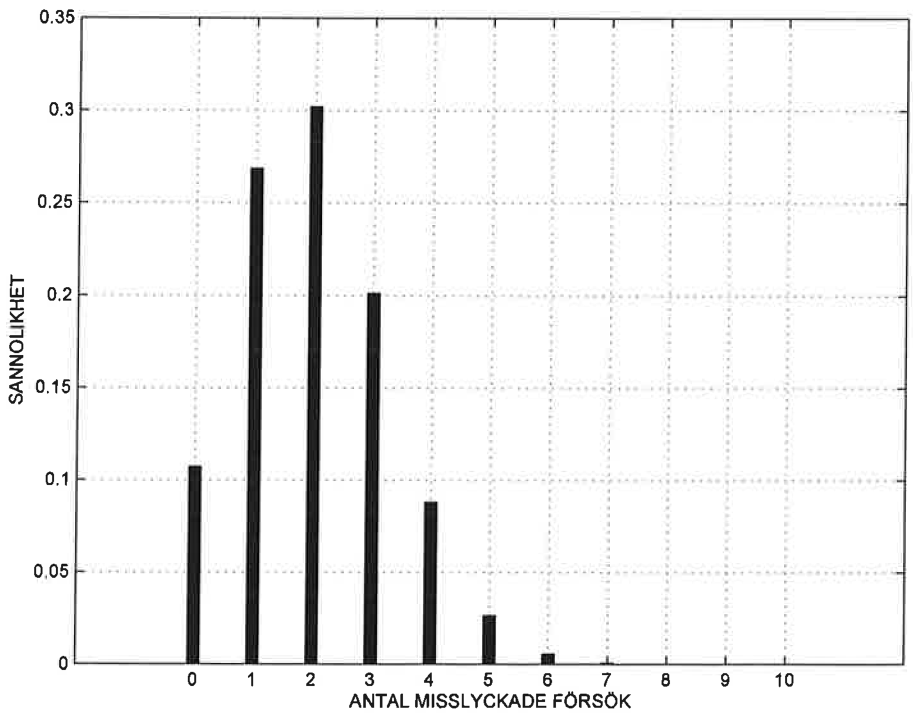
$$X \in Bin(n, p) = Bin(20, 1/6)$$

a) $P(X = 4) = f_X(4) = \binom{20}{4} (1/6)^4 (1 - 1/6)^{16}$

b) $P(X \leq 4) = F_X(4) = \sum_{x=0}^{4} \binom{20}{x} (1/6)^x (1 - 1/6)^{20-x}$

EXEMPEL: ”Experiment” Då man gör ett experiment misslyckas det tyvärr med sannolikheten 0.2. Antag att man gör 10 oberoende experiment.

- Vad är sannolikheten att inget av de 10 experimenten misslyckas?
- Vad är sannolikheten att minst ett av de 10 experimenten misslyckas?
- Vad är sannolikheten att precis 3 av de 10 experimenten misslyckas?
- Vad är sannolikheten att precis k av de 10 experimenten misslyckas?
- Vad är sannolikheten att högst 3 av de 10 experimenten misslyckas?
- Vad är sannolikheten att minst två av de 10 experimenten misslyckas?
- Hur många experiment ”förväntar man sig” ska misslyckas?



Tabell 6. Binomialfördelningen

$P(X \leq x)$ där $X \in Bin(n, p)$

För $p > 1/2$, utnyttja att $P(X \leq x) = P(Y \geq n - x)$ där $Y \in Bin(n, 1 - p)$

n	x	p 0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50
2	0	0.90250	0.81000	0.72250	0.64000	0.56250	0.49000	0.36000	0.25000
	1	0.99750	0.99000	0.97750	0.96000	0.93750	0.91000	0.84000	0.75000
3	0	0.85737	0.72900	0.61412	0.51200	0.42188	0.34300	0.21600	0.12500
	1	0.99275	0.97200	0.93925	0.89600	0.84375	0.78400	0.64800	0.50000
	2	0.99987	0.99900	0.99663	0.99200	0.98438	0.97300	0.93600	0.87500
4	0	0.81451	0.65610	0.52201	0.40960	0.31641	0.24010	0.12960	0.06250
	1	0.98598	0.94770	0.89048	0.81920	0.73828	0.65170	0.47520	0.31250
	2	0.99952	0.99630	0.98802	0.97280	0.94922	0.91630	0.82080	0.68750
	3	0.99999	0.99990	0.99949	0.99840	0.99609	0.99190	0.97440	0.93750
5	0	0.77378	0.59049	0.44371	0.32768	0.23730	0.16807	0.07776	0.03125
	1	0.97741	0.91854	0.83521	0.73728	0.63281	0.52822	0.33696	0.18750
	2	0.99884	0.99144	0.97339	0.94208	0.89648	0.83692	0.68256	0.50000
	3	0.99997	0.99954	0.99777	0.99328	0.98437	0.96922	0.91296	0.81250
	4	1.00000	0.99999	0.99992	0.99968	0.99902	0.99757	0.98976	0.96875
6	0	0.73509	0.53144	0.37715	0.26214	0.17798	0.11765	0.04666	0.01563
	1	0.96723	0.88574	0.77648	0.65536	0.53394	0.42018	0.23328	0.10938
	2	0.99777	0.98415	0.95266	0.90112	0.83057	0.74431	0.54432	0.34375
	3	0.99991	0.99873	0.99411	0.98304	0.96240	0.92953	0.82080	0.65625
	4	1.00000	0.99995	0.99960	0.99840	0.99536	0.98906	0.95904	0.89063
	5	1.00000	1.00000	0.99999	0.99994	0.99976	0.99927	0.99590	0.98438
7	0	0.69834	0.47830	0.32058	0.20972	0.13348	0.08235	0.02799	0.00781
	1	0.95562	0.85031	0.71658	0.57672	0.44495	0.32942	0.15863	0.06250
	2	0.99624	0.97431	0.92623	0.85197	0.75641	0.64707	0.41990	0.22656
	3	0.99981	0.99727	0.98790	0.96666	0.92944	0.87396	0.71021	0.50000
	4	0.99999	0.99982	0.99878	0.99533	0.98712	0.97120	0.90374	0.77344
	5	1.00000	0.99999	0.99993	0.99963	0.99866	0.99621	0.98116	0.93750
	6	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99994	0.99978	0.99836	0.99219
8	0	0.66342	0.43047	0.27249	0.16777	0.10011	0.05765	0.01680	0.00391
	1	0.94276	0.81310	0.65718	0.50332	0.36708	0.25530	0.10638	0.03516
	2	0.99421	0.96191	0.89479	0.79692	0.67854	0.55177	0.31539	0.14453
	3	0.99963	0.99498	0.97865	0.94372	0.88618	0.80590	0.59409	0.36328
	4	0.99998	0.99957	0.99715	0.98959	0.97270	0.94203	0.82633	0.63672
	5	1.00000	0.99998	0.99976	0.99877	0.99577	0.98871	0.95019	0.85547
	6	1.00000	1.00000	0.99999	0.99992	0.99962	0.99871	0.99148	0.96484
	7	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99993	0.99934	0.99609
9	0	0.63025	0.38742	0.23162	0.13422	0.07508	0.04035	0.01008	0.00195
	1	0.92879	0.77484	0.59948	0.43621	0.30034	0.19600	0.07054	0.01953
	2	0.99164	0.94703	0.85915	0.73820	0.60068	0.46283	0.23179	0.08984
	3	0.99936	0.99167	0.96607	0.91436	0.83427	0.72966	0.48261	0.25391
	4	0.99997	0.99911	0.99437	0.98042	0.95107	0.90119	0.73343	0.50000
	5	1.00000	0.99994	0.99937	0.99693	0.99001	0.97471	0.90065	0.74609
	6	1.00000	1.00000	0.99995	0.99969	0.99866	0.99571	0.97497	0.91016
	7	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99989	0.99957	0.99620	0.98047
	8	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99974	0.99805

Tabell 6 forts.

n	x	p 0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50
10	0	0.59874	0.34868	0.19687	0.10737	0.05631	0.02825	0.00605	0.00098
	1	0.91386	0.73610	0.54430	0.37581	0.24403	0.14931	0.04636	0.01074
	2	0.98850	0.92981	0.82020	0.67780	0.52559	0.38278	0.16729	0.05469
	3	0.99897	0.98720	0.95003	0.87913	0.77588	0.64961	0.38228	0.17188
	4	0.99994	0.99837	0.99013	0.96721	0.92187	0.84973	0.63310	0.37695
	5	1.00000	0.99985	0.99862	0.99363	0.98027	0.95265	0.83376	0.62305
	6	1.00000	0.99999	0.99987	0.99914	0.99649	0.98941	0.94524	0.82813
	7	1.00000	1.00000	0.99999	0.99992	0.99958	0.99841	0.98771	0.94531
	8	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99986	0.99832	0.98926
	9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99990	0.99902
11	0	0.56880	0.31381	0.16734	0.08590	0.04224	0.01977	0.00363	0.00049
	1	0.89811	0.69736	0.49219	0.32212	0.19710	0.11299	0.03023	0.00586
	2	0.98476	0.91044	0.77881	0.61740	0.45520	0.31274	0.11892	0.03271
	3	0.99845	0.98147	0.93056	0.83886	0.71330	0.56956	0.29628	0.11328
	4	0.99989	0.99725	0.98411	0.94959	0.88537	0.78970	0.53277	0.27441
	5	0.99999	0.99970	0.99734	0.98835	0.96567	0.92178	0.75350	0.50000
	6	1.00000	0.99998	0.99968	0.99803	0.99244	0.97838	0.90065	0.72559
	7	1.00000	1.00000	0.99997	0.99976	0.99881	0.99571	0.97072	0.88672
	8	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99987	0.99942	0.99408	0.96729
	9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99995	0.99927	0.99414
	10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99951
12	0	0.54036	0.28243	0.14224	0.06872	0.03168	0.01384	0.00218	0.00024
	1	0.88164	0.65900	0.44346	0.27488	0.15838	0.08503	0.01959	0.00317
	2	0.98043	0.88913	0.73582	0.55835	0.39068	0.25282	0.08344	0.01929
	3	0.99776	0.97436	0.90779	0.79457	0.64878	0.49252	0.22534	0.07300
	4	0.99982	0.99567	0.97608	0.92744	0.84236	0.72366	0.43818	0.19385
	5	0.99999	0.99946	0.99536	0.98059	0.94560	0.88215	0.66521	0.38721
	6	1.00000	0.99995	0.99933	0.99610	0.98575	0.96140	0.84179	0.61279
	7	1.00000	1.00000	0.99993	0.99942	0.99722	0.99051	0.94269	0.80615
	8	1.00000	1.00000	0.99999	0.99994	0.99961	0.99831	0.98473	0.92700
	9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99979	0.99719	0.98071
	10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99968	0.99683
	11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99976
13	0	0.51334	0.25419	0.12091	0.05498	0.02376	0.00969	0.00131	0.00012
	1	0.86458	0.62134	0.39828	0.23365	0.12671	0.06367	0.01263	0.00171
	2	0.97549	0.86612	0.69196	0.50165	0.33260	0.20248	0.05790	0.01123
	3	0.99690	0.96584	0.88200	0.74732	0.58425	0.42061	0.16858	0.04614
	4	0.99971	0.99354	0.96584	0.90087	0.79396	0.65431	0.35304	0.13342
	5	0.99998	0.99908	0.99247	0.96996	0.91979	0.83460	0.57440	0.29053
	6	1.00000	0.99990	0.99873	0.99300	0.97571	0.93762	0.77116	0.50000
	7	1.00000	0.99999	0.99984	0.99875	0.99435	0.98178	0.90233	0.70947
	8	1.00000	1.00000	0.99998	0.99983	0.99901	0.99597	0.96792	0.86658
	9	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99987	0.99935	0.99221	0.95386
	10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99993	0.99868	0.98877
	11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99986	0.99829
	12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99988

Väntevärde

Väntevärde är precis vad det låter som: Väntevärdet av X är det värde man förväntar sig att X har i genomsnitt.

Definition

$$\boxed{\mu = E[X] = \sum_{\text{alla } x} x \cdot f_X(x)}$$

Exempel: Tärningskast.

X = "Antal prickar"

$$E[X] = \sum_{x=1}^{6} x \cdot f_X(x) = \sum_{x=1}^{6} x \cdot \frac{1}{6}$$

$$= (1+2+3+4+5+6)/6 = 3.5$$

Väntevärde

Exempel: Poissonfördelningen.

Om $X \in Po(\lambda)$ så är

$$E[X] = \lambda$$

Exempel: Binomialfördelningen.

Om $X \in Bin(n, p)$ så är

$$E[X] = np. \qquad \text{(Rimligt?)}$$

Väntevärde

Exempel: Poissonfördelningen.

Om $X \in Po(\lambda)$ så är

$$E[X] = \lambda$$

Exempel: Binomialfördelningen.

Om $X \in Bin(n, p)$ så är

$$E[X] = np. \quad \text{(Rimligt?)}$$

Väntevärdet av en funktion $g(X)$ av en slumpvariabel X:

$$E[g(X)] = \sum_{\text{alla } x} g(x) f_X(x)$$

Exempel: Du får 100 kr gånger vad tärningen visar. Vad är väntevärdet av priset?

$$E[100X] = (100 + 200 + 300 + 400 + 500 + 600)/6 \text{ kr}$$
$$= 350 \text{ kr.}$$

Varians och standardavvikelse

Variansen av X beskriver hur mycket X varierar runt sitt väntevärde. Spridningen på X.

Definition:

$$\boxed{\begin{aligned} Var(X) &= E[(X - E[X])^2] = E[(X-\mu)^2] = \\ &= \sum_{\text{alla } x} (x-\mu)^2 f_X(x) \end{aligned}}$$

Standardavvikelsen är $\sqrt{Var(X)}$.

Exempel: Tärningskast.

X = "Antal prickar". $Var(X) = \sum_{x=1}^{6} (x-3.5)^2 \, 1/6$

$= ((-2.5)^2 + (-1.5)^2 + (-0.5)^2 + 0.5^2 + (1.5)^2 + (2.5)^2)/6$

$= \dfrac{17.5}{6}$

Varians och standardavvikelse

Exempel: Poissonfördelningen.

Om $X \in Po(\lambda)$ så är

$$Var[X] = \lambda$$

Exempel: Binomialfördelningen.

Om $X \in Bin(n, p)$ så är

$$V[X] = np(1-p)$$

Notera att variansen aldrig kan vara mindre än 0.

Tenta-uppgift

5p/100p

På en speciell väg gäller att slumpvariabeln

$$X = \text{"antal olyckor på en vecka"}$$

har följande sannolikhetsfördelning:

Antalet olyckor, x_i	0	1	2	3
Sannolikheten, $f(x_i) = P(X = x_i)$	0.70	0.20	0.06	0.04

Beräkna det förväntade antalet olyckor under en vecka.

(Vad är variansen?)

Extrauppgifter (Tavlan)

1.

$$X = \begin{cases} 3, & f(3) = 1/3 \\ 4, & f(4) = 1/4 \\ 7, & f(7) = 1/6 \\ 8, & f(8) = 1/6 \\ 9 & ? \end{cases}$$

a) $f(9)$?

b) $F(5)$?

c) $P(4 \le X \le 8)$ och $P(X \ge 8)$?

d) $E[X]$?

2. Kim slår 10 straffar under fotbollsträningen. Vad är sannolikheten att hen gör fler mål än hans väntevärde? Antag oberoende mellan straffarna och att hen gör mål med sannolikheten 0.4 per straff.

Extrauppgifter (Tavlan)

3. X har fördelningen (vilken?)

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

Vi vet att $P(X=0) = 1/2$. Beräkna $P(X \geq 2)$.

4. Antalet kunder som besöker en affär är Poissonfördelat med $\lambda = 3$ kunder/timme. Vad är sannolikheten att det kommer minst 12 kunder på 5 timmar?

Tabell 5 forts.

x \ μ	8.5	9.0	9.5	10.0	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0
0	0.00020	0.00012	0.00007	0.00005	0.00002	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.00193	0.00123	0.00079	0.00050	0.00020	0.00008	0.00003	0.00001	0.00000
2	0.00928	0.00623	0.00416	0.00277	0.00121	0.00052	0.00022	0.00009	0.00004
3	0.03011	0.02123	0.01486	0.01034	0.00492	0.00229	0.00105	0.00047	0.00021
4	0.07436	0.05496	0.04026	0.02925	0.01510	0.00760	0.00374	0.00181	0.00086
5	0.14960	0.11569	0.08853	0.06709	0.03752	0.02034	0.01073	0.00553	0.00279
6	0.25618	0.20678	0.16495	0.13014	0.07861	0.04582	0.02589	0.01423	0.00763
7	0.38560	0.32390	0.26866	0.22022	0.14319	0.08950	0.05403	0.03162	0.01800
8	0.52311	0.45565	0.39182	0.33282	0.23199	0.15503	0.09976	0.06206	0.03745
9	0.65297	0.58741	0.52183	0.45793	0.34051	0.24239	0.16581	0.10940	0.06985
10	0.76336	0.70599	0.64533	0.58304	0.45989	0.34723	0.25168	0.17568	0.11846
11	0.84866	0.80301	0.75199	0.69678	0.57927	0.46160	0.35316	0.26004	0.18475
12	0.90908	0.87577	0.83643	0.79156	0.68870	0.57597	0.46310	0.35846	0.26761
13	0.94859	0.92615	0.89814	0.86446	0.78129	0.68154	0.57304	0.46445	0.36322
14	0.97257	0.95853	0.94001	0.91654	0.85404	0.77202	0.67513	0.57044	0.46565
15	0.98617	0.97796	0.96653	0.95126	0.90740	0.84442	0.76361	0.66936	0.56809
16	0.99339	0.98889	0.98227	0.97296	0.94408	0.89871	0.83549	0.75592	0.66412
17	0.99700	0.99468	0.99107	0.98572	0.96781	0.93703	0.89046	0.82720	0.74886
18	0.99870	0.99757	0.99572	0.99281	0.98231	0.96258	0.93017	0.88264	0.81947
19	0.99947	0.99894	0.99804	0.99655	0.99071	0.97872	0.95733	0.92350	0.87522
20	0.99979	0.99956	0.99914	0.99841	0.99533	0.98840	0.97499	0.95209	0.91703
21	0.99992	0.99983	0.99964	0.99930	0.99775	0.99393	0.98592	0.97116	0.94689
22	0.99997	0.99993	0.99985	0.99970	0.99896	0.99695	0.99238	0.98329	0.96726
23	0.99999	0.99998	0.99994	0.99988	0.99954	0.99853	0.99603	0.99067	0.98054
24	1.00000	0.99999	0.99998	0.99995	0.99980	0.99931	0.99801	0.99498	0.98884
25	1.00000	1.00000	0.99999	0.99998	0.99992	0.99969	0.99903	0.99739	0.99382
26	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99997	0.99987	0.99955	0.99869	0.99669
27	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99994	0.99980	0.99936	0.99828
28	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99991	0.99970	0.99914
29	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99996	0.99986	0.99958
30	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99994	0.99980
31	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99997	0.99991
32	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99996
33	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998
34	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999
35	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000