F7 Vektorprodukter och rummet $\mathbb{R}^n$

Låt $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vara en HON-bas för rummet.
I förra föreläsningen härledde vi följande koordinaträkning för vektorprodukten:

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2 y_3 - x_3 y_2,\ x_3 y_1 - x_1 y_3,\ x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Minnesregel:

Inför beteckningen $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, då är

OBS!

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

på plats 1 finns inga x_1, y_1 termer

på plats 2 finns inga x_2, y_2 termer

på plats 3 finns inga x_3, y_3 termer

Alt. Sarrus regel (läs själva på s. 90 i boka).

Ex 1 Beräkna $(2,3,-1) \times (4,1,-3)$.

Lösning: $\bar{u} \times \bar{v} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right)$

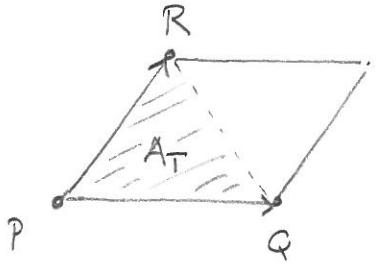
$$= \left(3\cdot(-3) - (-1)\cdot 1,\ -\left(2\cdot(-3) - (-1)\cdot 4\right),\ 2\cdot 1 - 3\cdot 4 \right)$$

$$= \left(-9+1,\ -(-6+4),\ -10 \right)$$

$$= \underline{(-8, 2, -10)}.$$

Ex2 Bestäm arean av triangeln med hörnen i punkterna $P:(3,0,1)$, $Q:(2,1,0)$ och $R:(0,0,1)$.

Lösning –



Triangelarean A_T är halva arean av det parallellogram som spänns upp av $\overline{PQ}$ och $\overline{PR}$ (se F6, s.5).

$$\Rightarrow \quad A_T = \frac{1}{2}\left|\overline{PQ} \times \overline{PR}\right|.$$

Här är

$$\overline{PQ} = (2,1,0) - (3,0,1) = (-1,1,-1)$$

$$\overline{PR} = (0,0,1) - (3,0,1) = (-3,0,0)$$

$$\overline{PQ} \times \overline{PR} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(0, -\left(0-(-1)(-3)\right), 0-(-3)\right) = (0,3,3).$$

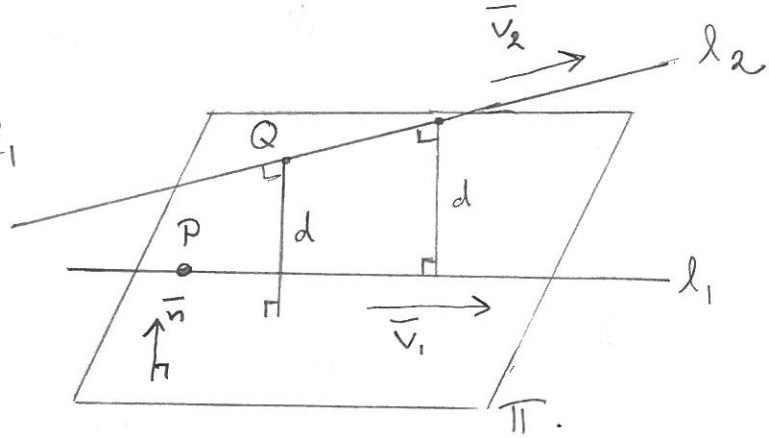
$$\Rightarrow \quad \underline{A_T} = \frac{1}{2}\left|(0,3,3)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{18} = \underline{\frac{3}{\sqrt{2}}\text{ a.e}}$$

Ex3 Bestäm det (minsta) avståndet mellan linjerna

$l_1: (x,y,z) = (1,1,1) + t(3,4,2)$ och $l_2: (x,y,z) = (-1,10,-1) + t(3,4,1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Lösning –

Vi bildar planet Π som innehåller l_1 och är parallellt med l_2.



Fortsätter på nästa sida.

(Mera lösning av Ex 3)

Π har riktningsvektorerna $\overline{v_1} = (3,4,2)$ och $\overline{v_2} = (3,4,1)$

och normalvektorn blir då, tex,

$$\overline{n} = \overline{v_1} \times \overline{v_2} = \left(\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (4-8, -(3-6), 12-12) = (-4, 3, 0).$$

$\Rightarrow \Pi: -4x + 3y + 0 \cdot z + D = 0.$

$P \in l_1 \Rightarrow P \in \Pi$. Ta tex $P: (1,1,1) \Rightarrow$

$$-4 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \text{ och } \boxed{\Pi: -4x + 3y + 1 = 0}$$

Avståndet d mellan l_1 och l_2 är detsamma som avståndet mellan Π och en godtycklig punkt på l_2 (se figuren på första sidan).

$Q: (-1, 10, -1) \in l_2 \Rightarrow$

$$d = \frac{|-4 \cdot (-1) + 3 \cdot 10 + 0 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{35}{\sqrt{25}} = \underline{7 \text{ l.e}}$$

enligt Satsen för avståndet mellan punkt/plan (F6, s. 2).

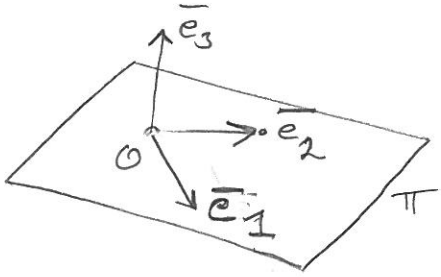
Ex 4 Bestäm en HON-bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ så att $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_2$ ligger i planet $\Pi: x+y+z=0$.

Lösning.

* $\bar{e}_3$ ska vara ortogonal mot $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ dvs parallell med planets normalvektor $\bar{n} = (1,1,1)$ och vi kan välja

$$\underline{\bar{e}_3} = \frac{1}{|\bar{n}|}\bar{n} = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)}.$$

$\bar{e}_3$ ska ha längden 1



* Välj en vektor i planet (lätt då origo ligger i planet) tex $(-1,1,0)$ och normera:

$$\underline{\bar{e}_1} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)}.$$

* Vi vet att $\bar{e}_2 = \bar{e}_3 \times \bar{e}_1$ (jfr F6, s. 7) dvs

$$\underline{\bar{e}_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{(1,1,1) \times (-1,1,0)}_{\text{obs! ordningen är viktig!}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-1, -(0 - 1\cdot(-1)), 1 - 1\cdot(-1)\right)$$

$$= \underline{\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)}.$$

Rummet $\mathbb{R}^n$

Planet Om vi inför en ON-bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ kan vi uttrycka våra geometriska operationer addition, mult. med skalär och skalärprodukter med hjälp utav koordinater:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2 .$$

Vi kallar mängden av alla talpar (x_1, x_2) för $\mathbb{R}^2$.

Rummet $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ är en ON-bas $\Rightarrow$

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

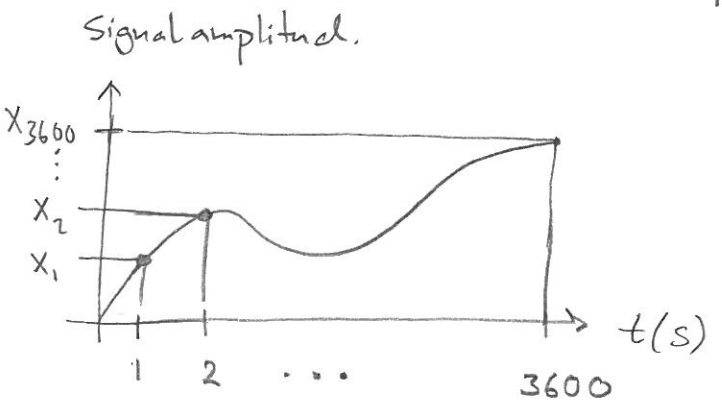
$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 .$$

Vi kallar mängden av alla taltripplar (x_1, x_2, x_3) för $\mathbb{R}^3$.

n-dimensioner Om vi bortser ifrån möjliga geometriska tolkningar kan vi på samma vis introducera mängden av alla "n-tiplar" $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ som vi kallar $\mathbb{R}^n$.

Ex 5 Sampla en analog signal varje sekund under en timme:



Den samplade signalen $(x_1, x_2, \ldots, x_{3600})$ är ett element i $\mathbb{R}^n$ med $n = 3600$.

Def. Med $\mathbb{R}^n$ menar vi alla "n-tiplar" $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ av reella tal tillsammans med räkneoperationerna

(i) $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$

(ii) $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$

(iii) $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \bullet (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$.

Kommentar * Vi kallar även $\bar{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ för en vektor.

* Vi definierar längden $|\bar{u}|$ som

$$|\bar{u}| = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

<u>Def</u>. Vektorerna $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_p$ i $\mathbb{R}^n$ kallas en <u>bas</u> om varje $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas som

$$\bar{u} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \ldots + x_p \bar{e}_p$$

med <u>entydigt</u> bestämda tal (koordinater) $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

<u>Kommentar</u> Vi kommer strax se att $\boxed{p = n}$.

<u>Ex 6</u> Enklaste basen i $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0) \\ \bar{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ \vdots \\ \bar{e}_n = (0, \ldots, 0, 1) \end{cases}$$

Vilket är en bas eftersom

$$\bar{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, \ldots, 0, 1).$$

Vi definierar linjärkombinationer, linjärt beroende/oberoende som för geometriska vektorer och vi får:

<u>Sats</u>

(i) Vektorerna $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_p$ är <u>linjärt beroende</u> $\Leftrightarrow$

$\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \ldots + \lambda_p \bar{u}_p = \bar{0}$ har lösning med något $\lambda_i \neq 0$.

(ii) Vektorerna $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_p$ är <u>linjärt oberoende</u> $\Leftrightarrow$

$\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \ldots + \lambda_p \bar{u}_p = \bar{0}$ har bara lösningen $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$.

<u>Def</u> – $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_p$ sägs spänna upp $\mathbb{R}^n$ om det för varje $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ finns tal $x_1, x_2, \ldots, x_p$ så att

$$\bar{v} = x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + \ldots + x_p\bar{u}_p$$

(ej nödvändigtvis entydigt!)

<u>Bassatsen</u> För $\mathbb{R}^n$ gäller

(i) Varje bas har n stycken vektorer.

(ii) n vektorer är en bas $\Leftrightarrow$
de är linjärt oberoende $\Leftrightarrow$
de spänner upp $\mathbb{R}^n$.

(iii) Flera än n vektorer är alltid linjärt beroende.
Färre än n vektorer kan inte spänna upp $\mathbb{R}^n$.

<u>Beviset</u> är kursivt, men tänk igenom motsvarande resultat för geometriska vektorer i planet/rummet.

<u>Ex 7</u> Låt $\bar{u}_1 = (1,0,2,3)$, $\bar{u}_2 = (1,2,-1,0)$, $\bar{u}_3 = (2,-2,0,1)$
$\bar{u}_4 = (3,1,0,2)$ och $\bar{u}_5 = (1,1,0,1)$.

<u>Frågor</u> 1) Är $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_5$ linjärt oberoende? <u>Svar</u>: Nej!

2) Spänner $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ upp $\mathbb{R}^4$? <u>Svar</u>: Nej

3) Är $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$ en bas för $\mathbb{R}^4$? <u>Svar</u>: Kanske, måste räkna!