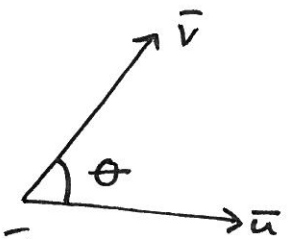
FS1 Skalärprodukt

Låt θ vara den minsta vinkeln mellan vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

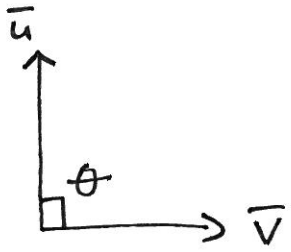


Def. Skalärprodukten $\bar{u} \cdot \bar{v}$ mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$ ges av talet (skalären)

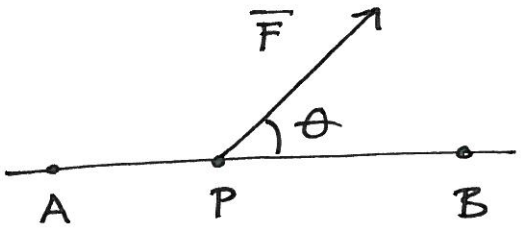
$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \begin{cases} |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos\theta & \text{om } \bar{u}, \bar{v} \neq \bar{0} \\ 0 & \text{om } \bar{u} \text{ eller } \bar{v} = \bar{0}. \end{cases}$$

Ex 1 $\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}| \cdot |\bar{u}| \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1} = |\bar{u}|^2$. Således är $|\bar{u}| = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}}$.

Ex 2 Om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är vinkelräta så är $\theta = \pi/2$ och $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$.



Ex 3 En partikel p förflyttas ifrån punkten A till B med påverkan av kraften $\bar{F}$. Bestäm det totala arbetet.



Lösning.

Kraften som verkar i förflyttningens riktning är $|\bar{F}|\cos\theta$.

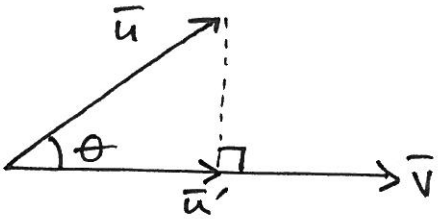
Det utförda arbetet är då

$$W = \underbrace{|\bar{F}|\cos\theta}_{\text{kraft}} \cdot \underbrace{|\overline{AB}|}_{\text{vägen}} = \bar{F} \cdot \overline{AB}.$$

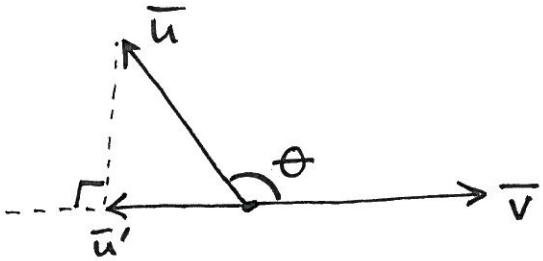
Def. $\bar{u}$ och $\bar{v}$ kallas ortogonala om $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$, skrivs $\bar{u} \perp \bar{v}$. (dvs de är vinkelräta eller en av dem är $= \bar{0}$).

Def. Om $\bar{v} \neq \bar{0}$ så definieras den ortogonala projektionen $\bar{u}'$ av $\bar{u}$ på $\bar{v}$ enligt figurerna nedan.

Fall 1)



Fall 2)



Sats 1 (s.65 i boken) **projektionsformeln**

Den ortogonala projektionen av $\bar{u}$ på $\bar{v}$ ges av

$$\boxed{\bar{u}' = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|^2} \bar{v}}$$

OBS! $\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|^2}$ är ett tal!

Bevis I fallet 1) blir $|\bar{u}'| = |\bar{u}| \cos\theta$.

Eftersom $\bar{e} = \frac{1}{|\bar{v}|} \bar{v}$ är en vektor i $\bar{v}$:s riktning med längden 1 så får vi

$$\bar{u}' = |\bar{u}'| \cdot \bar{e} = |\bar{u}| \cos\theta \cdot \frac{1}{|\bar{v}|} \bar{v} = \frac{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos\theta}{|\bar{v}|^2} \bar{v}$$

$$= \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|^2} \bar{v}.$$

I fall 2) så är $\bar{u}$ och $\bar{v}$ motsatt riktade, men $\cos\theta$ är negativt ($\pi/2 < \theta \leq \pi$) så vi får samma formel för $\bar{u}'$. $\square$

Sats 2 (sidan 66 i boken)

För skalärprodukten gäller följande räkneregler:

(i) $\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$

(ii) $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$

(iii) $(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) \cdot \bar{v} = \bar{u}_1 \cdot \bar{v} + \bar{u}_2 \cdot \bar{v}$

(iv) $(\lambda \bar{u}) \cdot \bar{v} = \lambda(\bar{u} \cdot \bar{v})$.

(iii') $\bar{u} \cdot (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \bar{u} \cdot \bar{v}_1 + \bar{u} \cdot \bar{v}_2$

(iv') $\bar{u} \cdot (\lambda \bar{v}) = \lambda(\bar{u} \cdot \bar{v})$

Bevis Läs själva.

Ex 4 $\bar{u}, \bar{v}$ är vektorer med $|\bar{u}| = 1$, $|\bar{v}| = 2$ och $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Beräkna $(2\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} - 3\bar{v})$ och $|\bar{u} + \bar{v}|$.

Lösning.

$$(2\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} - 3\bar{v}) = 2\bar{u} \cdot (\bar{u} - 3\bar{v}) + \bar{v} \cdot (\bar{u} - 3\bar{v})$$

$$= 2\bar{u} \cdot \bar{u} + 2\bar{u} \cdot (-3\bar{v}) + \bar{v} \cdot \bar{u} + \bar{v} \cdot (-3\bar{v})$$

$$= 2|\bar{u}|^2 - 6\bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{v} - 3|\bar{v}|^2$$

$$= 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{= 1/2} - 3 \cdot 2^2 = \underline{-15}.$$

$$|\bar{u} + \bar{v}|^2 = (\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = |\bar{u}|^2 + 2\bar{u} \cdot \bar{v} + |\bar{v}|^2$$

$$= 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos\pi/3 + 2^2 = 7$$

$$\Rightarrow |\bar{u} + \bar{v}| = \underline{\sqrt{7}}.$$

Skalärprodukten blir lättare att beräkna om vi har följande typ av bas:

Def. Basen $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ i planet kallas för ortonormerad (ON-bas) om

(i) $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$, dvs $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0$ (ortogonal)

(ii) $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1$ (normerad)

Låt $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ vara en ON-bas för planet. Om $\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$ och $\bar{v} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2$ så blir deras skalärprodukt

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = (x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2)\cdot(y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2)$$

$$= x_1y_1\underbrace{\bar{e}_1\cdot\bar{e}_1}_{=|\bar{e}_1|^2=1} + x_1y_1\underbrace{\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2}_{=0} + x_2y_1\underbrace{\bar{e}_2\cdot\bar{e}_1}_{=0} + x_2y_2\underbrace{\bar{e}_2\cdot\bar{e}_2}_{=1}$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2,$$

eller uttryckt i koordinater

$$\boxed{(x_1, x_2)\cdot(y_1, y_2) = x_1y_1 + x_2y_2.} \quad (1a)$$

Speciellt gäller det att

$$|\bar{u}|^2 = \bar{u}\cdot\bar{u} = (x_1, x_2)\cdot(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{(Pythagoras sats!)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{|\bar{u}| = |(x_1, x_2)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad (1b)$$

I rummet är en bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ ortonormerad om

(i) $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2, \bar{e}_1 \perp \bar{e}_3, \bar{e}_2 \perp \bar{e}_3$ (parvis ortogonala) (ii) $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1$.

För $\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$ och $\bar{v} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3$ gäller (precis som i planet):

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

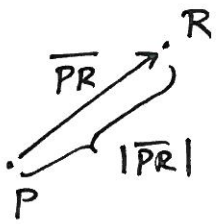
$$|(x_1, x_2, x_3)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \qquad (2)$$

OBS! (1) och (2) gäller endast för ortonormerade baser!

Ex 5 Bestäm avståndet mellan punkterna $P:(1,0,4)$ och $R:(3,-1,2)$ (i ett ON-system = koord.sys. + ON-bas).

Lösning. $\overline{PR} = (3,-1,2) - (1,0,4) = (2,-1,-2)$

$\Rightarrow |\overline{PR}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$



Svar Avståndet är 3 längdenheter.

Ex 6 Bestäm vinkeln θ mellan $\bar{u} = (-1,1,0)$ och $\bar{v} = (0,1,1)$. (ON-bas).

Lösning. $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos\theta \iff \cos\theta = \dfrac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|}$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = (-1,1,0) \cdot (0,1,1) = 1$ och $|\bar{u}| = |\bar{v}| = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ $(0 \le \theta \le \pi)$.

Planets normal

I fortsättningen antar vi att bas/koordinatsystem är ON.

Betrakta planet $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ (affin form).

Om $P_1:(x_1,y_1,z_1)$ och $P_2:(x_2,y_2,z_2)$ båda ligger i Π så gäller det att

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \\ Ax_2+By_2+Cz_2+D=0 \end{cases} \Rightarrow A(x_1-x_2)+B(y_1-y_2)+C(z_1-z_2)=0$$

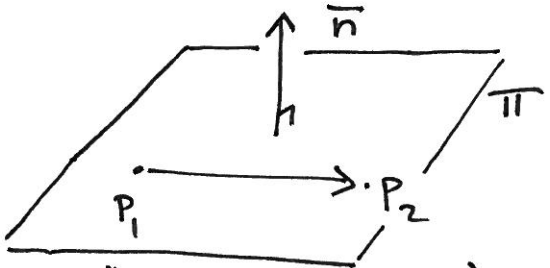
$$\Rightarrow (A,B,C)\cdot(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)=0$$

$$\Leftrightarrow (A,B,C)\cdot \overline{P_1P_2}=0 \Leftrightarrow \boxed{(A,B,C)\perp \overline{P_1P_2}.} \quad (3)$$

Om $\bar{u}$ ligger i Π kan vi välja P_1, P_2 i Π så att $\bar{u}=\overline{P_1P_2}$.

Dvs (3) ger att vektorn (A,B,C) är ortogonal mot alla vektorer $\bar{u}$ i planet $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$.

$\bar{n}=(A,B,C)$ kallas för planet Π:s normal(vektor).



Ex 7 Är $\bar{u}=(2,1,-3)$ parallell med (ligger i) planet $\Pi: 2x-y+z+4=0$?

Lösning. Normalen till planet Π är (tex) $\bar{n}=(2,-1,1)$.

$\bar{u}\cdot\bar{n}=(2,1,-3)\cdot(2,-1,1)=4-1-3=0$

dvs $\bar{u}\perp\bar{n}$. Alltså är $\bar{u}$ parallell med planet Π.

Svar Ja.

Ex 8 Bestäm en ekvation för planet genom punkten $P:(2,1,2)$ och med normalvektorn $\bar{n} = (-1,7,3)$.

Lösning – Vi har $\Pi: -x+7y+3z+D=0$ för något tal D. Då P ligger i planet får vi att

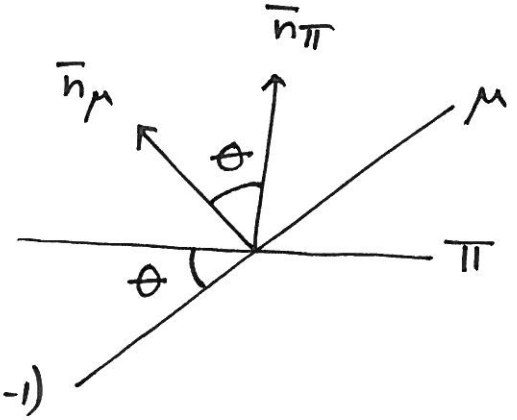
$$-2+7\cdot 1+3\cdot 2+D=0 \iff D=-11.$$

Svar $\Pi: -x+7y+3z-11=0$.

Ex 9 Bestäm vinkeln mellan planen $\Pi: 4x+y+z+2=0$ och $\mu: 2x+2y-z-1=0$.

Lösning –

Vinkeln θ mellan Π och μ är samma som vinkeln mellan planens normaler $\bar{n}_\Pi$ och $\bar{n}_\mu$.



Här är $\bar{n}_\Pi = (4,1,1)$ och $\bar{n}_\mu = (2,2,-1)$ och

$$\cos\theta = \frac{\bar{n}_\Pi \cdot \bar{n}_\mu}{|\bar{n}_\Pi|\cdot|\bar{n}_\mu|} = \frac{(4,1,1)\cdot(2,2,-1)}{|(4,1,1)|\cdot|(2,2,-1)|} = \frac{8+2-1}{\sqrt{16+1+1}\sqrt{4+4+1}}$$

$$= \frac{9}{3\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \theta = \pi/4 \quad (0 \le \theta \le \pi).$$

Kommentar: Linjen $Ax+By+C=0$ på affin form i planet har normalvektorn $\bar{n} = (A,B)$.

Läs själva sats 4 (sidan 71 i boken)!

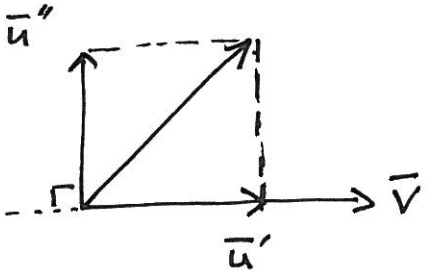
Komposantuppdelning

Def. Om $\bar{u}$ kan skrivas som $\bar{u} = \bar{u}' + \bar{u}''$ så kallar vi $\bar{u}'$ och $\bar{u}''$ för komposanter till $\bar{u}$.

Ex 10 Dela upp $\bar{u} = (1,2,3)$ i två komposanter $\bar{u}'$ och $\bar{u}''$ där $\bar{u}' \perp \bar{u}''$ och $\bar{u}'$ är parallell med $\bar{v} = (3,1,0)$. (ON-bas)

Lösning.

$\bar{u}'$ blir ortogonala projektionen av $\bar{u}$ på $\bar{v}$ dvs



$$\bar{u}' = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{v}|^2}\bar{v} = \frac{(1,2,3)\cdot(3,1,0)}{|(3,1,0)|^2}(3,1,0)$$

↑ Sats 1 (projektionsformeln), se sidan 2.

$$= \frac{3+2+0}{9+1}(3,1,0) = \underline{\frac{1}{2}(3,1,0)}.$$

Eftersom $\bar{u} = \bar{u}' + \bar{u}''$ (vi söker) får vi

$$\bar{u}'' = \bar{u} - \bar{u}' = (1,2,3) - \frac{1}{2}(3,1,0) = \underline{\frac{1}{2}(-1,3,0)}.$$

Svar: $\bar{u} = \bar{u}' + \bar{u}''$ där $\bar{u}' = \frac{1}{2}(3,1,0)$ och $\bar{u}'' = \frac{1}{2}(-1,3,0)$.

Kolla själva att $\bar{u}' \perp \bar{u}''$!