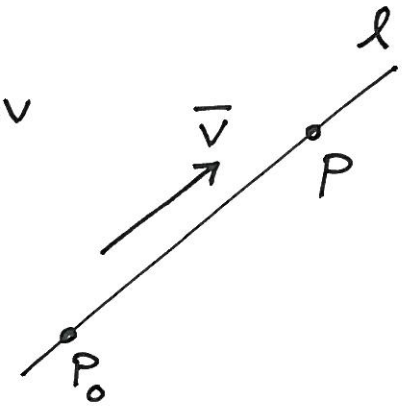
F4 | Linjer och plan

1) Linjens ekvation

En linje ℓ i rummet bestäms av

i) en punkt P_0 och

ii) en vektor $\bar{v}$.



Vektorn $\bar{v}$ kallas för linjen ℓ:s riktningsvektor.

En (godtycklig) punkt P ligger på ℓ $\iff$

$$\overline{P_0P} \parallel \bar{v} \iff \overline{P_0P} = t\bar{v} \text{ för något } t \in \mathbb{R}.$$

Vi inför ett koordinatsystem (se F3) $O\bar{e}_x\bar{e}_y\bar{e}_z$ och kan då skriva $P_0: (x_0, y_0, z_0)$, $P: (x, y, z)$ och $\bar{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

$$\overline{P_0P} = \overline{OP} - \overline{OP_0} = (x_0 - x, y - y_0, z - z_0) = t(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\iff$$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Linjens ekvation på parameterform

Ex 1 Bestäm en ekvation för linjen genom punkterna $R:(1,2,3)$ och $Q:(6,5,4)$.

Lösning. Sätt (tex) $P_0 = R$ och

$$\bar{v} = \overline{RQ} = (6,5,4)-(1,2,3) = (5,3,1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1+5t \\ y = 2+3t \\ z = 3+t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

OBS Samma linje ges tex också av $\begin{cases} x = 6-10t \\ y = 5-6t \\ z = 4-2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$

(här har vi valt $P_0 = Q$ och $\bar{v} = 2\overline{QR}$.)

Ex 2 Ligger punkten $P:(1,5,3)$ på linjen i Ex 1?

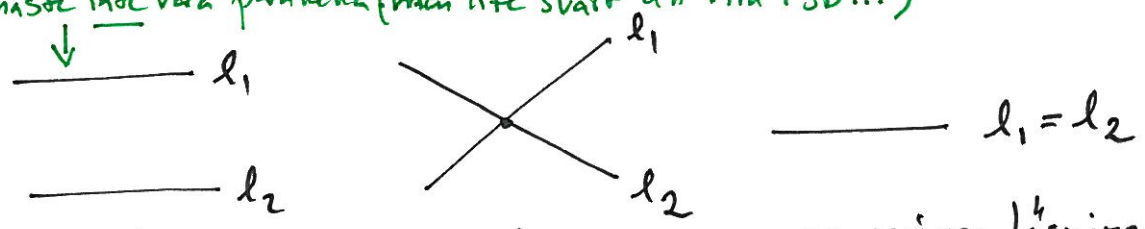
Lösning. Prova: $\begin{cases} 1 = 1+5t \\ 5 = 2+3t \\ 3 = 3+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$ ← Saknar lösning!

Svar: Nej, P ligger inte på linjen.

Ex 3 Skär $l_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3+2t \end{cases}$ och $l_2: \begin{cases} x = 4-t \\ y = 5-2t \\ z = 3+t \end{cases}$ varandra?

Kommentar Vi kan få ett av tre fall:

måste inte vara parallella (men lite svårt att rita i 3D...)



ingen lösning — en lösning — ∞-många lösningar (en parameter)

<u>Lösning</u> <u>Ex 3</u> Döp om ett t till s, och se om det finns (t,s) som ger samma punkt $P:(x,y,z)$:

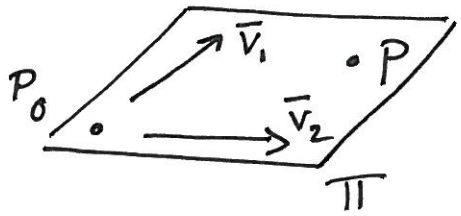
$$\begin{cases} 1+t = 4-s \\ 2-t = 5-2s \\ \underbrace{3+2t}_{\ell_1} = \underbrace{3+s}_{\ell_2} \end{cases} \iff \begin{cases} s+t = 3 \\ 2s-t = 3 \quad (-2) \\ -s+2t = 0 \quad (1) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} s+t = 3 \\ -3t = -3 \\ 3t = 3 \quad (1) \end{cases} \iff \begin{cases} s+t = 3 \\ t = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} s = 2 \\ t = 1 \end{cases}.$$

Sätt in $t=1$ i ℓ_1 $\Rightarrow$ skärningspunkten $(2,1,5)$.

<u>Svar</u> Ja, de skär varandra i punkten $(2,1,5)$.

2) <u>Planets ekvation</u>



Ett plan Π bestäms av

(i) En punkt P_0 och

(ii) Två icke-parallella (riktnings)vektorer $\bar{v}_1, \bar{v}_2$.

Låt P vara en punkt i planet Π. Då $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ är en bas för planet gäller det att

$$\overline{P_0P} = s\bar{v}_1 + t\bar{v}_2 \quad \text{där } s,t \in \mathbb{R}.$$

Jfr sats 2, F2, sidan 5...

Vi inför ett koordinatsystem $O\bar{e}_x\bar{e}_y\bar{e}_z$ och får

$P_0: (x_0, y_0, z_0)$, $P: (x, y, z)$, $\bar{v}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ och $\bar{v}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.

$$\Rightarrow \overline{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = s(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + t(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0 + s\alpha_1 + t\alpha_2 \\ y = y_0 + s\beta_1 + t\beta_2 \\ z = z_0 + s\gamma_1 + t\gamma_2 \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}.}$$

dvs planets ekvation på parameterform.

Ex 4 Bestäm ekvationen för planet Π som går genom punkterna $R: (1, 2, 0)$, $Q: (0, 1, 1)$ och $S: (2, -1, -3)$.

Lösning (tex) $P_0 = R$ och

$\bar{v}_1 = \overline{RQ} = (0, 1, 1) - (1, 2, 0) = (-1, -1, 1)$

$\bar{v}_2 = \overline{RS} = (2, -1, -3) - (1, 2, 0) = (1, -3, -3)$.

(kolla själv att $\bar{v}_1 \nparallel \bar{v}_2$!)

Svar $\Pi: \begin{cases} x = 1 - s + t \\ y = 2 - s - 3t \\ z = 0 + s - 3t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$

Ex 5 Ligger $P:(-3,10,10)$ i planet π i Ex 4?

Lösning. Testa om det finns värden för (s,t) som löser

$$\begin{cases} -3 = 1-s+t \\ 10 = 2-s-3t \\ 10 = 0+s-3t \end{cases} \iff \begin{cases} -s+t=-4 \\ -s-3t=8 \\ s-3t=10 \end{cases} \quad (-1) \quad (1)$$

$$\iff \begin{cases} -s+t=-4 \\ -4t=12 \\ -2t=6 \end{cases} \iff \begin{cases} s=4+t=1 \\ t=-3 \end{cases}.$$

← Det finns en lösning (s,t)!

Svar: Ja.

3) Affin form

För plan i rummet har vi en alternativ formulering:

Ta tex planet π från Ex 4:

$$\pi: \begin{cases} -s+t = x-1 \\ -s-3t = y-2 \\ s-3t = z \end{cases} \quad (-1) \quad (1) \iff \begin{cases} -s+t=x-1 \\ -4t=-x+y-1 \\ -2t=x+z-1 \end{cases} \quad \left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\iff \begin{cases} -s+t=x-1 \\ -4t=-x+y-1 \\ 0=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y+z-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Systemet har en lösning (s,t) precis då den sista ekvationen är uppfyllt, dvs

$$\boxed{P:(x,y,z) \text{ ligger i } \pi \iff 0=3x-y+2z-1}$$

Planet π:s affina form

Varje plan i rummet kan skrivas på formen

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

där minst ett av talen $A, B, C \neq 0$.

Ex 6 xy-planet (se F3) har den affina formen $z = 0$.

Läs själva om linjer i planet sidorna 50-52 i boken.

Vi har sett hur man går från parameterform till affin form. Tvärtom är enklare:

Ex 7 Skriv $\Pi: -3x + y - 2z + 1 = 0$ på parameterform.

Lösning. Sätt (tex) $y = s$ och $z = t \Rightarrow$

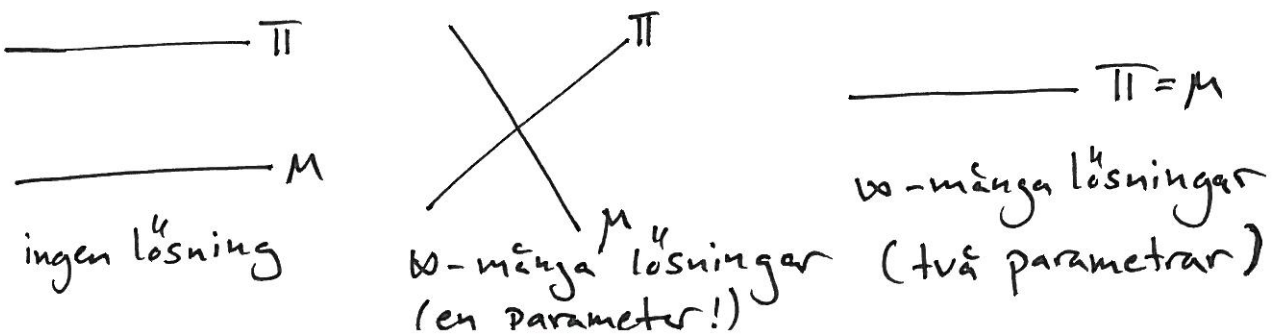
Svar

$$\Pi: \begin{cases} x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}s - \frac{2}{3}t \\ y = \quad s \\ z = \quad t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Ex 8 Bestäm skärningen mellan planen

$\Pi: -3x + y - 2z + 1 = 0$ och $\mu: 2x - y + 4z + 2 = 0$.

Kommentar Tre möjliga fall: (planen går "ut ur pappret")



ingen lösning

∞-många lösningar (en parameter!)

∞-många lösningar (två parametrar)

<u>Lösning av Ex 8</u> En punkt $P:(x,y,z)$ ligger i båda planen om

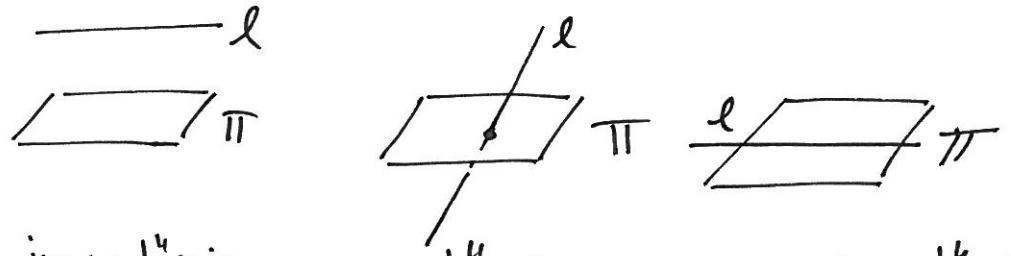
$$\begin{cases} -3x+y-2z=-1 \\ 2x-y+4z=-2 \end{cases} \quad \frac{2}{3} \iff \begin{cases} -3x+y-2z=-1 \\ -\frac{1}{3}y+\frac{8}{3}z=-\frac{8}{3} \end{cases}.$$

Sätt (tex) $z=t \Rightarrow \ell: \begin{cases} x=3+2t \\ y=8+8t \\ z=t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}.$

<u>Svar</u> Planen skär varandra längs linjen ℓ.

<u>Ex 9</u> Bestäm skärningen mellan $\pi: -3x+y-2z+1=0$ och linjen $\ell:(x,y,z)=(2,1,1)+t(1,-3,3)$.

<u>Kommentar</u> Tre möjliga fall igen...



ingen lösning — en lösning — ∞-många lösningar (en parameter)

<u>Lösning</u>. Sätt in linjens punkter $P:(x,y,z)$ i planets ekvation $\Rightarrow$

$$-3(2+t)+(1-3t)-2(1+3t)+1=0$$

$\iff -6-12t=0 \iff t=-1/2.$

<u>Svar</u>: π och ℓ skär varandra i punkten $P:\frac{1}{2}(3,5,-1)$.

<u>Läs</u> <u>själva</u> om parallellitet <u>sidan 60</u> i boken.