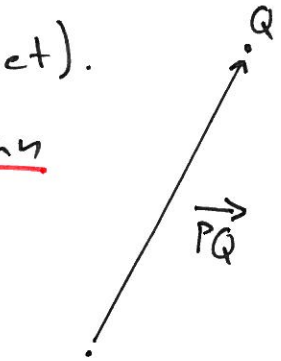
F2 | Geometriska vektorer

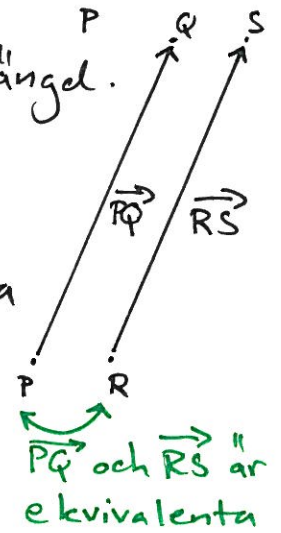
1) Vektorbegreppet

Vi ska nu införa ett av de centrala begreppen i linjär algebra, nämligen vektorer. Vi börjar med vektorer som kan åskådliggöras geometriskt i planet eller rummet.

Låt P och Q vara två punkter (tex i rummet). Med $\overrightarrow{PQ}$ betecknar vi den riktade sträckan från P till Q.



Två riktade sträckor sägs vara ekvivalenta om de har samma riktning och samma längd.



Def. En geometrisk vektor är mängden av alla riktade sträckor som är ekvivalenta med en given riktad sträcka.

Ex 1 $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{RS}$ är representanter för samma vektor. Vektorn brukar betecknas med $\overline{PQ}$ (alternativt med $\overline{RS}$...)

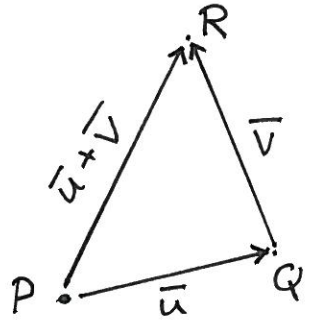
Kommentar

* En riktad sträcka har riktning, längd och startpunkt.
* En (geometrisk) vektor har riktning och längd.

Notation * Nollvektorn representeras av alla riktade sträckor med längden noll, tex $\overrightarrow{PP}$, $\overrightarrow{RR}$, osv.

* Längden av en vektor $\bar{u}$ betecknas med $|\bar{u}|$.

2) Räkneoperationer



Def. Addition $\bar{u}+\bar{v}$ fås via figuren

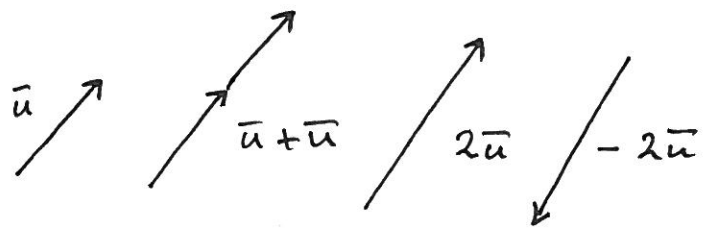
Dvs
1) Välj en riktad sträcka $\overrightarrow{PQ}$ så att $\bar{u} = \overline{PQ}$.
2) Bestäm punkten R så att $\bar{v} = \overline{QR}$.
3) $\bar{u}+\bar{v}$ definieras som vektorn $\overline{PR}$.

Def. Multiplikation med skalär (skalär = tal)

$\lambda \in \mathbb{R}$ och $\bar{u}$ är en vektor. Då är $\lambda\bar{u}$ vektorn som har
1) längden $|\lambda||\bar{u}|$,
2) Samma riktning som $\bar{u}$ om $\lambda > 0$,
   Motsatt riktning som $\bar{u}$ om $\lambda < 0$.

Om $\lambda = 0$ så är $\lambda\bar{u} = \bar{0}$.

Ex 2



Sats 1 (boken sidan 23) För geometriska vektorer gäller följande räknelagar:

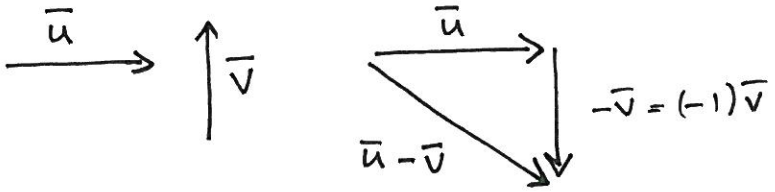
1) $\bar{u}+\bar{v} = \bar{v}+\bar{u}$
   $\bar{u}+(\bar{v}+\bar{w}) = (\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}$
   $\bar{u}+(-1)\bar{u} = \bar{0}$
   $\bar{u}+\bar{0} = \bar{u}$

2) $\lambda(\mu\bar{u}) = (\lambda\mu)\bar{u}$
   $1\cdot\bar{u} = \bar{u}$
   $0\cdot\bar{u} = \bar{0}$
   $\lambda\cdot\bar{0} = \bar{0}$

3) $(\lambda+\mu)\bar{u} = \lambda\bar{u}+\mu\bar{u}$
   $\lambda(\bar{u}+\bar{v}) = \lambda\bar{u}+\lambda\bar{v}$

Subtraktion Har vi inte definierat, men vi betecknar

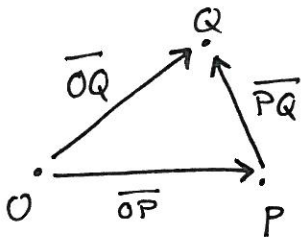
$$-\bar{u} = (-1)\bar{u} \quad \text{och} \quad \bar{u} - \bar{v} = \bar{u} + (-1)\bar{v}.$$



Ex 3 Givet tre punkter O, P, Q så gäller

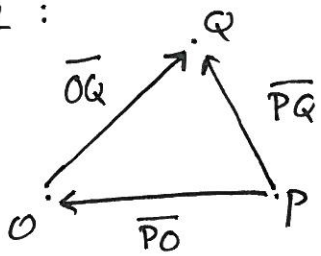
$$\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}.$$

Lösning – Alt 1:



$$\overline{OP} + \overline{PQ} = \overline{OQ} \iff \overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}.$$

Alt 2:

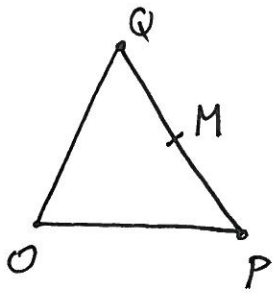


$$\overline{PQ} = \overline{PO} + \overline{OQ} = -\overline{OP} + \overline{OQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}.$$

Ex 4 Låt O, P, Q vara tre punkter (tex i rummet). Om M är mittpunkten på sträckan PQ så är

$$\boxed{\overline{OM} = \frac{1}{2}\left(\overline{OP} + \overline{OQ}\right).}$$

Mittpunktsformeln!



Lösning – $\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM} = \overline{OP} + \frac{1}{2}\overline{PQ} = \overline{OP} + \frac{1}{2}\left(\overline{OQ} - \overline{OP}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\overline{OP} + \overline{OQ}\right).$

jfr Ex 3

Läs själva om tyngdpunktsformeln på sidorna 26-27 i boken.

3) Bas och koordinater i planet

Idé Finn två vektorer $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ så att alla vektorer $\bar{u}$ i planet kan skrivas

$$\bar{u} = \underbrace{x_1}_{\text{tal}}\bar{e}_1 + \underbrace{x_2}_{\text{tal}}\bar{e}_2 .$$

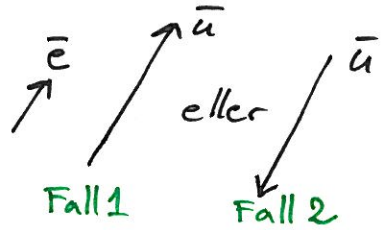
Vi kan då representera $\bar{u}$ med talparet x_1, x_2 och alla geometriska räkneoperationer kan översättas till räkningar med tal!

Lemma Låt $\bar{e} \neq \bar{0}$ och $\bar{e} \parallel \bar{u}$. ← $\bar{e}$ och $\bar{u}$ är parallella.
Då kan varje vektor $\bar{u}$ skrivas

$$\boxed{\bar{u} = x\bar{e}}$$

med ett entydigt bestämt tal x.

Bevis (Existens) $\bar{e} \parallel \bar{u}$ dvs



Om vi väljer

$$x = \begin{cases} |\bar{u}|/|\bar{e}| & \text{fall 1} \\ -|\bar{u}|/|\bar{e}| & \text{fall 2} \end{cases}$$

Så har $\bar{u}$ och $x\bar{e}$ samma riktning och samma längd

$$\left(|x\bar{e}| = |x||\bar{e}| = \frac{|\bar{u}|}{|\bar{e}|}|\bar{e}| = |\bar{u}| \right) \text{ dvs } \bar{u} = x\bar{e}.$$

(Entydighet) Likheterna $\bar{u} = x\bar{e} = y\bar{e}$ kan bara vara uppfyllda om $x = y$. $\square$

Sats 2 (sidan 29 i boken)

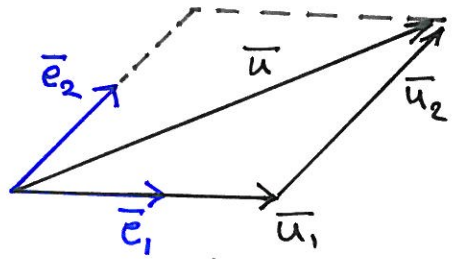
Låt $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_2$ vara två icke-parallella vektorer i planet.

Då kan varje vektor $\bar{u}$ i planet skrivas

$$\boxed{\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2}$$

med entydigt bestämda tal x_1, x_2.

Bevis (Existens) Bilda följande parallellogram



Enligt definitionen av addition för vektorer får vi att

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 \quad \text{där} \quad \bar{u}_1 \parallel \bar{e}_1 \text{ och } \bar{u}_2 \parallel \bar{e}_2.$$

Enligt vårt Lemma (sidan 4) existerar två tal x_1, x_2 så att

$$\bar{u}_1 = x_1\bar{e}_1 \quad \text{och} \quad \bar{u}_2 = x_2\bar{e}_2,$$

dvs $\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$.

(Entydighet) Antag att

$$\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2$$

för två olika talpar x_1, x_2 och y_1, y_2.

$$\Rightarrow (x_1 - y_1)\bar{e}_1 = (y_2 - x_2)\bar{e}_2.$$

Då talparen är olika är tex $x_1 \neq y_1$

$$\Rightarrow \bar{e}_1 = \underbrace{\frac{y_2 - x_2}{x_1 - y_1}}_{\text{tal}}\bar{e}_2 \Rightarrow \bar{e}_1 \parallel \bar{e}_2 \Rightarrow \text{Motsägelse!} \quad \square$$

Terminologi

* De två icke-parallella vektorerna $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ sägs vara en bas för planet.
* Talparet x_1, x_2 kallas för $\bar{u}$:s koordinater med avseende på basen $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.
* Om det är underförstått vilken bas vi har valt förkortar vi ofta $\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$ till $\bar{u} = (x_1, x_2)$.

Ex 5 I basen $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ är $\bar{u} = (3,2)$ och $\bar{v} = (-2,1)$. Vilka koordinater får $\bar{w} = 2\bar{u} + 3\bar{v}$?

Lösning.

$$\bar{w} = 2(3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2) + 3(-2\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$$
$$= (6-6)\bar{e}_1 + (4+3)\bar{e}_2 = 0\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2 .$$

Svar $\bar{w}$ har koordinaterna $(0,7)$ i basen $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.

Räkning med koordinater i planet

Om vi väljer en bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ och antar att $\bar{u} = (x_1, x_2)$ och $\bar{v} = (y_1, y_2)$, vad får vektorerna $\bar{u} + \bar{v}$ och $\lambda\bar{v}$ för koordinater ?

* $\bar{u} + \bar{v} = (x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2) + (y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2)$
$$= (x_1 + y_1)\bar{e}_1 + (x_2 + y_2)\bar{e}_2$$
* $\lambda\bar{u} = \lambda(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2) = (\lambda x_1)\bar{e}_1 + (\lambda x_2)\bar{e}_2$

eller uttryckt i koordinater:

$$\boxed{\begin{aligned} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ \lambda(x_1, x_2) &= (\lambda x_1, \lambda x_2) \end{aligned}}$$

Ex 6 I en bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ är $\bar{u} = (2,3)$ och $\bar{v} = (-4,6)$.

Duger $\bar{u}, \bar{v}$ som en ny bas för planet?

Lösning – Vi undersöker om $\bar{u} \parallel \bar{v} \iff$ det finns ett λ så att $\bar{u} = \lambda \bar{v}$.

$$\bar{u} = \lambda \bar{v} \iff (2,3) = \lambda(-4,6) \iff \begin{cases} 2 = -4\lambda \\ 3 = 6\lambda \end{cases} \leftarrow \text{Saknar lösning!}$$

Dvs $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är inte parallella och duger därför som en ny bas (jfr med sats 2).

Ex 7 Vilka koordinater har $\bar{e}_1$ i den nya basen $\bar{u}, \bar{v}$?

Lösning – Vi har

$$\begin{cases} \bar{u} = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 \\ \bar{v} = -4\bar{e}_1 + 6\bar{e}_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\bar{e}_2 + 2\bar{e}_1 = \bar{u} \\ 6\bar{e}_2 - 4\bar{e}_1 = \bar{v} \end{cases} \quad -2$$

$$\iff \begin{cases} 3\bar{e}_2 + 2\bar{e}_1 = \bar{u} \\ -8\bar{e}_1 = \bar{v} - 2\bar{u} \end{cases}$$

Dvs $\bar{e}_1 = \frac{1}{4}\bar{u} - \frac{1}{8}\bar{v}$.

Svar $\bar{e}_1$ har koordinaterna $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ i basen $\bar{u}, \bar{v}$.

OBS $\bar{e}_1$ har koordinaterna $(1,0)$ i basen $\bar{e}_1, \bar{e}_2$, så vi måste bestämma oss för en fix bas när vi skriver (x_1, x_2)!

4) Bas och koordinater i rummet

Vi kan också genomföra samma "program" för geometriska vektorer i rummet. Motsvarigheten till sats 2 blir nu:

Sats 3 Låt $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vara tre vektorer i rummet som inte ligger i samma plan. (dvs $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ är inte alla parallella med ett och samma plan)

Då kan varje vektor $\bar{u}$ i rummet skrivas

$$\boxed{\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3}$$

med entydigt bestämda tal x_1, x_2, x_3.

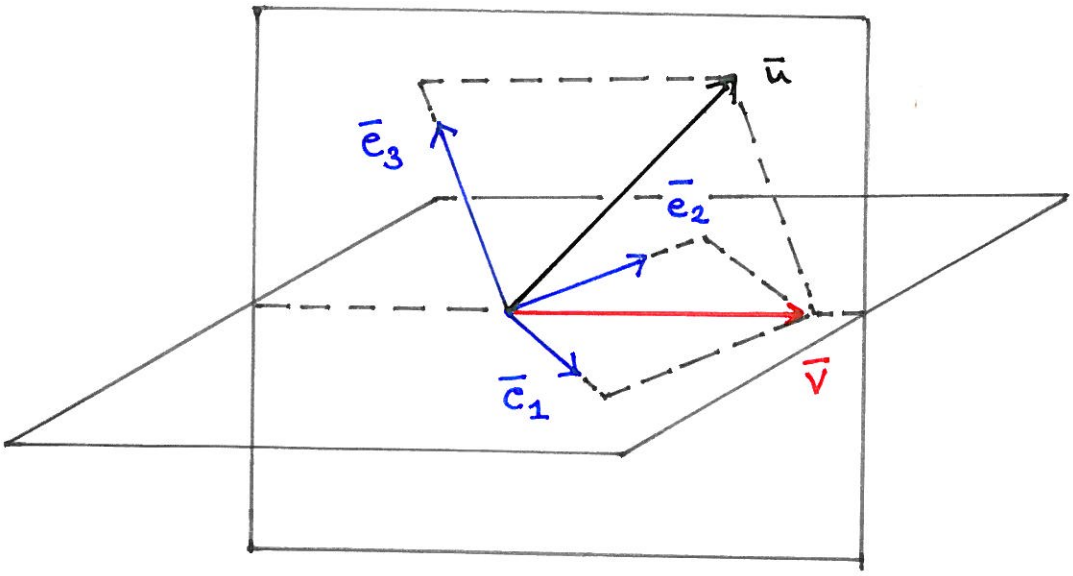
Terminologi

* Tre vektorer ~~som~~ $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ som inte ligger i samma plan sägs vara en bas för rummet.
* Taltrippeln x_1, x_2, x_3 kallas för $\bar{u}$:s koordinater med avseende på basen $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.
* Vi förkortar $\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$ till $\bar{u} = (x_1, x_2, x_3)$.
* Vi kan (precis som för planet) ~~skriva~~ uttrycka addition och multiplikation med skalär i koordinater:

$$\boxed{\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) &= (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \\ \lambda(x_1, x_2, x_3) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \end{aligned}}$$

Bevis av sats 3

(Existens) Då $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ inte ligger i samma plan kan vi enligt figuren



välja en vektor $\bar{v}$ så att $\begin{cases} \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{v} & \text{ligger i ett plan} \\ \bar{e}_3, \bar{v}, \bar{u} & \text{—//— } \end{cases}$.

Vi har att $\bar{e}_1 \overset{\text{ej parallella}}{\nparallel} \bar{e}_2$ och $\bar{e}_3 \nparallel \bar{v}$ dvs Sats 2 (sidan 5) ger

$$\bar{v} = y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2 \quad \text{och} \quad \bar{u} = z_1 \bar{v} + z_2 \bar{e}_3$$

$$\Rightarrow \quad \bar{u} = z_1(y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2) + z_2 \bar{e}_3 = \underset{z_1 y_1}{\underset{\parallel}{x_1}} \bar{e}_1 + \underset{z_1 y_2}{\underset{\parallel}{x_2}} \bar{e}_2 + \underset{z_2}{\underset{\parallel}{x_3}} \bar{e}_3 .$$

(Entydighet) Antag att

$$\bar{u} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3 = y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2 + y_3 \bar{e}_3$$

för två olika taltripplar där tex $x_1 \neq y_1$.

$$\Rightarrow \quad (x_1 - y_1)\bar{e}_1 + (x_2 - y_2)\bar{e}_2 + (x_3 - y_3)\bar{e}_3 = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{e}_1 = \frac{y_2 - x_2}{x_1 - y_1} \bar{e}_2 + \frac{y_3 - x_3}{x_1 - y_1} \bar{e}_3$$

$\Rightarrow$ $\bar{e}_1$ ligger i ett plan som spänns upp av $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$

$\Rightarrow$ Motsägelse! $\square$