F13 Mera om determinanter

Vi fortsätter med att analysera determinantens egenskaper (först för 2x2/3x3-matriser och till slut för nxn-matriser):

Sats

$$\boxed{\det A^T = \det A}$$

"Bevis" Skriv ut höger- och vänster-ledet, tex för $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\det A^T = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \qquad \square$$

Räknelagar $A = (A_1\ A_2\ A_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Sats (a) $\det(A_1' + A_1''\ A_2\ A_3) = \det(A_1'\ A_2\ A_3) + \det(A_1''\ A_2\ A_3)$.

(b) $\det(\lambda A_1\ A_2\ A_3) = \lambda \det(A_1\ A_2\ A_3)$ där $\lambda \in \mathbb{R}$, precis samma gäller för A_2 och A_3.

(c) Byter två kolonner plats ändras tecknet, tex

$$\det(A_1\ A_2\ A_3) = -\det(A_3\ A_2\ A_1) = \det(A_2\ A_3\ A_1).$$

(d) Två kolonner är lika $\Rightarrow \det A = 0$.

(e) Addera en multipel av en kolonn till en annan ändrar inte determinanten, tex $\det(A_1 + \lambda A_2\ A_2\ A_3) = \det(A_1 A_2 A_3)$.

(f) $\det I = 1$.

<u>Kommentar</u> Samma gäller för 2x2-matriser.

<u>Bevis</u> Låt $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vara en HON-bas och tolka kolonnerna A_1, A_2, A_3 som geometriska vektorer (tex $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{a}_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + a_{31}\bar{e}_3$).

<u>(a–c)</u> Följer alla ur vår definition av determinanten:

$$\det(A_1\ A_2\ A_3) = \underset{\uparrow}{V}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = \bar{a}_1 \cdot (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3).$$

volym med tecken (se F12, s.1)

Tex (a): $\underline{\det(A_1' + A_1''\ A_2\ A_3)} = (\bar{a}_1' + \bar{a}_1'') \cdot (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)$

$$= \bar{a}_1' \cdot (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3) + \bar{a}_1'' \cdot (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3) = \underline{\det(A_1'\ A_2\ A_3) + \det(A_1''\ A_2\ A_3)}.$$

<u>(d)</u> antag tex att $A_2 = A_1$:

$$\det(A_1\ A_1\ A_3) = V(\underbrace{\bar{a}_1, \bar{a}_1, \bar{a}_3}_{\text{ligger i ett plan, dvs ingen volym!}}) = 0.$$

<u>(e)</u> Tex $\det(A_1 + \lambda A_2\ A_2\ A_3) \underset{(a),(b)}{=} \det(A_1\ A_2\ A_3) + \lambda \underbrace{\det(A_2\ A_2\ A_3)}_{=0\ (d)}$

$$= \det(A_1\ A_2\ A_3).$$

<u>(f)</u> Om $A = I$ så är $\bar{a}_1 = \bar{e}_1$, $\bar{a}_2 = \bar{e}_2$ och $\bar{a}_3 = \bar{e}_3$

$$\Rightarrow \det(I) = \underbrace{V(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}_{\text{kub med sidorna 1 (pos. orient.)}} = 1.$$

$\square$

Sats $\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$

Bevis Läs själva (s. 203).

OBS $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

Av satserna följer att:

Sats (i) A inverterbar $\Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

(ii) A ortogonal $\Rightarrow \det A = 1$ eller -1.

Bevis (i) $AA^{-1} = I \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \underbrace{\det I}_{=1}$

$\Rightarrow \det A^{-1} = 1/\det A.$

(ii) A ortogonal $\Rightarrow AA^T = I$

$\Rightarrow \det(AA^T) = \det A \underbrace{\det A^T}_{=\det A} = (\det A)^2 = \underbrace{\det I}_{=1}$

$\Rightarrow \det A = \pm 1.$

$\square$

Utveckling efter rad/kolonn

Rep

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} \circ & \text{—} & \text{—} \\ | & a_{22} & a_{23} \\ | & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} | & * & * \\ \circ & \text{—} & \text{—} \\ | & * & * \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} | & * & * \\ | & * & * \\ \circ & \text{—} & \text{—} \end{vmatrix}$$

(utveckling efter första kolonnen).

Om A har många nollor på någon rad/kolonn kan det vara fördelaktigt att utveckla efter den istället.

Då det A = det A^T kan vi utveckla efter första raden istället:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$$

Byte av två rader/kolonner ändrar tecken, dvs vi kan utveckla efter <u>alla</u> rader/kolonner bara vi ser till på tecknen:

<u>Regel</u> <u>2x2</u> $\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}$ <u>3x3</u> $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

<u>Ex</u>

$$\begin{vmatrix} * & * & * \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ * & * & * \end{vmatrix} = -a_{21}\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$$

eller med siffror

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}_{-2+3} - 1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}_{4+2} = -5.$$

Definition av större determinanter ($n \times n$, $n > 3$)

Att ge en strikt definition är relativt omständligt (se tex boken kap 9.8) och vi nöjer oss med följande:

Om vi utvecklar efter rad/kolonn med "teckenregeln"

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & & & & & \end{vmatrix}$$

får vi en följd av utvecklingar med mindre och mindre determinanter:

$$n \times n = n \text{ st. } (n-1) \times (n-1) = n(n-1) \text{ st. } (n-2) \times (n-2)$$

$$= \cdots = \underset{n!/2}{\underset{\shortparallel}{\text{många}}} \ 2 \times 2 \text{-determinanter.}$$

<u>OBS</u> Alla tidigare satser för determinanter är fortfarande sanna!

<u>EX</u> Är
$$\begin{cases} \bar{v}_1 = (1, 2, 1, -1) \\ \bar{v}_2 = (2, 3, 1, 2) \\ \bar{v}_3 = (1, 0, 0, 0) \\ \bar{v}_4 = (0, 0, 1, 0) \end{cases}$$
linjärt oberoende i $\mathbb{R}^4$?

<u>Lösning</u> $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ lin. ob. $\Leftrightarrow$

de fyra vektorerna är en bas i $\mathbb{R}^4$ $\Leftrightarrow$

$\det(A) \neq 0$, där A:s kolonnvektorer är $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_4$.

$\hookrightarrow$

(mera lösning) kolla om det $A = 0$:

$$\underset{4\times 4}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \underset{\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}}{=} -0 \cdot \underset{3\times 3}{\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}} + 0 \cdot \underset{3\times 3}{\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}} - 1 \cdot \underset{3\times 3}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}} + 0 \cdot \underset{3\times 3}{\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}}.$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}}{=} -\left(1 \cdot \underset{2\times 2}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} - 0 \cdot \underset{2\times 2}{\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}} + 0 \cdot \underset{2\times 2}{\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}}\right) = -7.$$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow$ $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_4$ är lin. ob.

Linjära avbildningar $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ och determinanter

I F12 såg vi att volymen som kolonnerna i en 3x3-matris spänner upp i en given ON-bas blev

$$V(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = \det A = a_{11}a_{22}a_{33} + \dots - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Om vi representerar A:s kolonner i en godtycklig bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ (ej nödvändigtvis ON) får man istället:

Sats (Volymsatsen, s. 197 i boken)

$$\boxed{V(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = \det A \; V(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3).}$$

<u>Kommentar</u> Tänk efter att $V(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = 1$ om $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ är en ON-bas!

Denna sats kan användas för att få "motsvarande" resultat för linjära avbildningar:

<u>Sats</u> (s. 216 i boken)

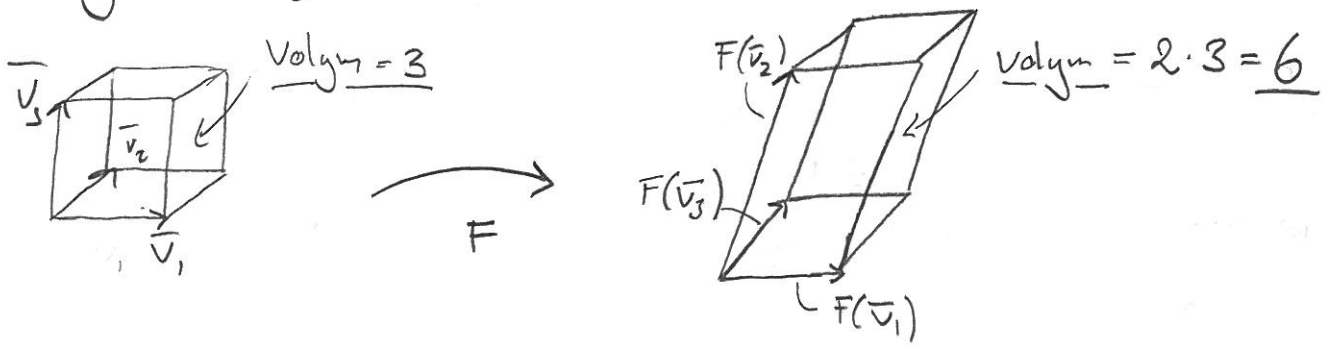
Låt $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en lin. avb. med avb. matrisen A.

För alla vektorer $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ gäller

$$V(F(\bar{v}_1), F(\bar{v}_2), F(\bar{v}_3)) = \det(A)\, V(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3).$$

<u>Kommentarer</u> * Motsvarande gäller för $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

* Tolkning: Antag att $\det(A) = 2$ och $V(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = 3$:

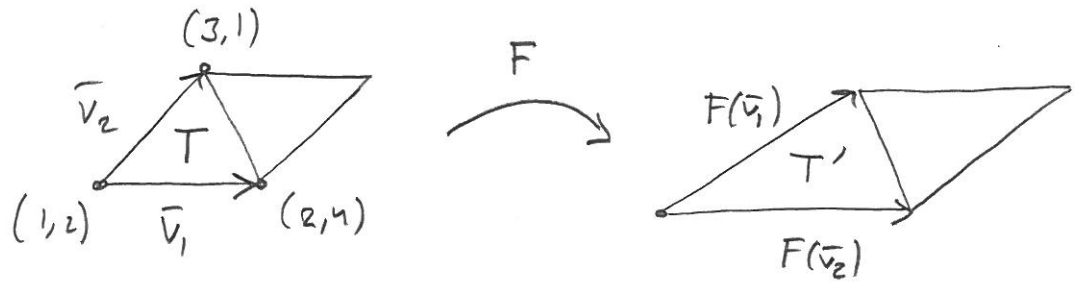


<u>Ex</u> $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linjär med avb. matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

T är triangeln med hörn i $(1,2), (2,4), (3,1)$.

Hur stor blir arean av den triangel som fås om alla punkter i T avbildas med F?

Lösning.



$\bar{v}_1 = (2,4) - (1,2) = (1,2)$

$\bar{v}_2 = (3,1) - (1,2) = (2,-1)$, sätt $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Area}(T) = \frac{1}{2}\left|\det(B)\right| = \frac{1}{2}\left|-1-4\right| = \frac{5}{2} \text{ a.e.}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$$

$\Rightarrow$ En area blir fem gånger större efter avb. med F

$\Rightarrow$ $\text{Area}(T') = 5 \cdot \text{Area}(T) = \underline{\frac{25}{2} \text{ a.e.}}$

Läs själva adjunkter och Cramers regel (s. 207 - 211 i boken).