F1 Linjära ekvationssystem

1) Introduktion

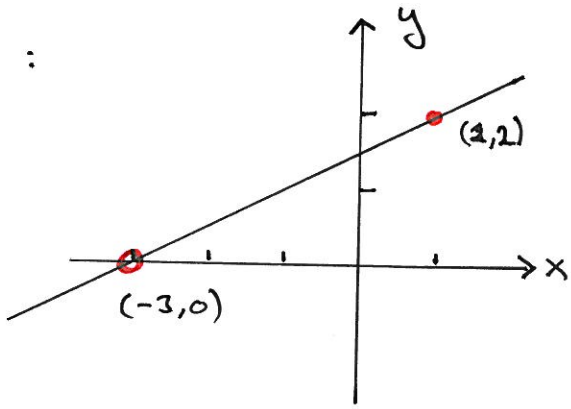
Linjär algebra – systematisk studie av linjära ekvationssystem.

Varför? i) Förekommer i så gott som alla natur- och teknikvetenskaper.

ii) En av de få problemklasser som vi kan lösa "något så när" med hjälp utav en dator...

Kurskommentar Lösningar av linjära ekvationssystem kan tolkas i termer av geometriska objekt (tex punkter, linjer, plan) och vi kommer ~~också~~ därför ägna en del tid åt geometri i 2 och 3 dimensioner.

Vi inleder med ett par exempel:



Ex 1 Ekvationen

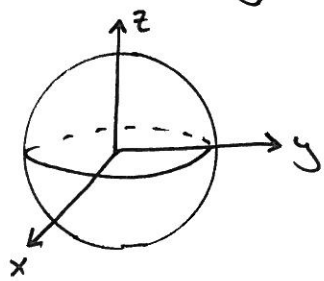
obekanta

$$1 \cdot x - 2 \cdot y = -3$$

koefficienter högerled

är linjär.

Det finns (oändligt) många lösningar (x,y) och de ~~alla~~ bildar en rät linje.



Ex 2 Ekvationen

$$x^2 + y^2 + z^3 = 1$$

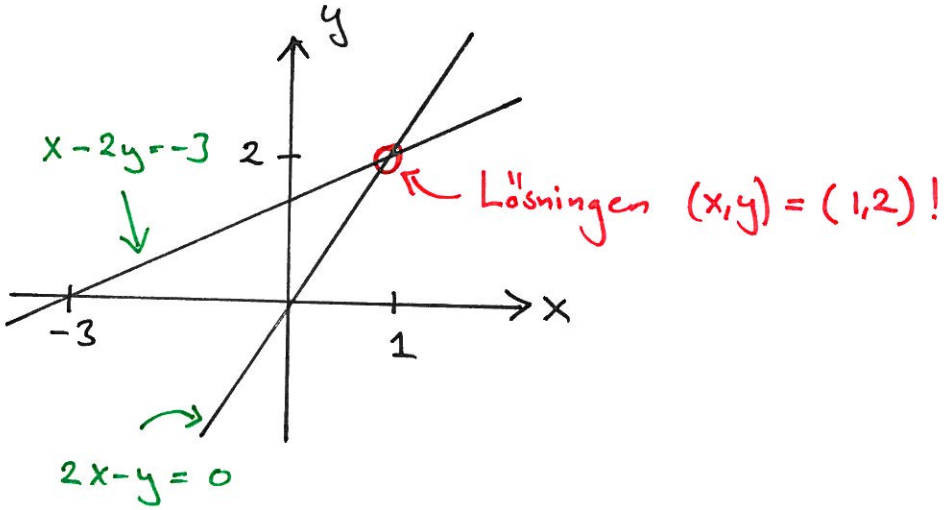
är inte linjär. Här finns det återigen oändligt många lösningar (som bildar enhetssfären).

Ex 3 Linjärt ekvationssystem:

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Två ekvationer (dvs ett system...) med två obekanta.

Alt 1 Grafisk lösning (två linjer som skär varandra):



Dvs systemet har en lösning $(x,y) = (1,2)$.

Alt 2 "Räkning"

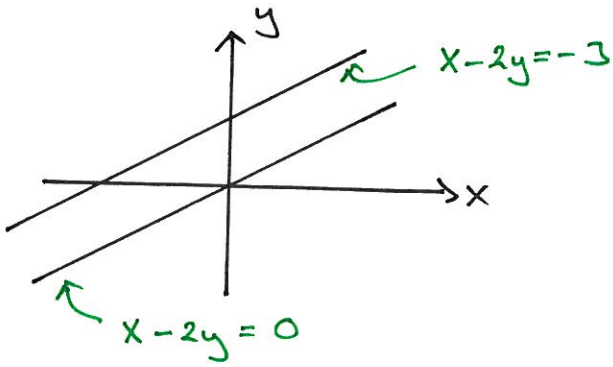
Från den andra ekvationen ser vi att $y = 2x$.
Sätter vi in detta i den första ekvationen får vi

$$x - 2\cdot(2x) = -3 \iff x = 1$$

och sen $y = 2\cdot 1$.

Ex 4

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$



Systemet saknar en lösning (x,y) eftersom ekvationerna beskriver två parallella linjer.

Lösningsmängdens struktur

Redan nu har vi sett att linjära ekvationssystem kan ha

* En lösning [Ex 3]
* Oändligt många lösningar [Ex 1]
* Ingen lösning [Ex 4].

Detta är faktiskt de enda tre fallen som kan inträffa oavsätt antalet ekvationer och obekanta!

Ett mål i kursen är att bevisa detta och lära oss metoder för att avgöra vilket av fallen som inträffar.

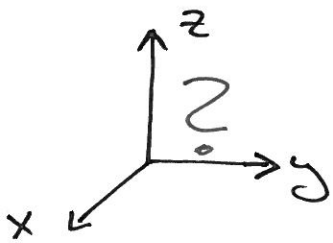
Övning: Bevisa att detta redan gäller för en linjär ekvation med en obekant, dvs $ax = b$ där a och b är givna tal.

2) Gausselimination

~~Sammanfattning~~ Vi fortsätter med ett exempel:

Ex 5 Linjärt ekvationssystem med tre ekvationer/obekanta:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = 2 \\ -2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$



Geometrisk tolkning: Tre plan som skär varandra i en punkt (svårt att rita ...)

"Räkning": Görbart men lätt att göra fel utan systematik!

Ex 6 System med 10^7 ekvationer/obekanta ...

Uppträder tex vid simuleringar av tunna metallkonstruktioner som bucklas.

Geometrisk tolkning / mänsklig räkning: Inte möjligt...

Eftersökes Algoritm som beräknar lösningen till ett godtyckligt linjärt ekvationssystem.

Ex 7 Ett ovanligt enkelt system (som vi kan lösa på ett systematiskt vis):

$$\begin{cases} x + y - z = 1 & (A) \\ 0x + y + z = -1 & (B) \\ 0x + 0y + (-2)z = 5 & (C) \end{cases}$$

System av denna typ sägs vara på trappstegsform.

Lösning. (C) $-2z = 5 \iff z = -5/2$

(B) $y + z = -1 \iff y = -1 - z = -1 + 5/2 = 3/2$

(A) $x + y - z = 1 \iff x = 1 - y + z = 1 - 3/2 - 5/2 = -3$

Svar $(x, y, z) = (-3, 3/2, -5/2)$ (dvs en lösning).

Ex 5 (igen)

Hur löser vi då
$$\begin{cases} x+y-z=1 & (A) \\ 3x+4y-2z=2 & (B) \\ -2x+y+3z=0 & (C) \end{cases} \quad [S1] \; ?$$

Idé Omforma (S1) till ett system på trappstegsform genom att successivt "eliminera" variabler:

Steg 1 Eliminera x ur (B) och (C) genom att addera $-3(A)$ till (B) och $2(A)$ till (C):

$$\begin{cases} x+y-z=1 & (A')=(A) \\ 0 \quad y+z=-1 & (B')=(B)-3(A) \\ 0 \quad 3y+z=2 & (C')=(C)+2(A) \end{cases} \quad [S2]$$

Steg 2 Eliminera y ur (C') genom att addera $-3(B')$ till (C'):

$$\begin{cases} x+y-z=1 & (A'')=(A') \\ y+z=-1 & (B'')=(B') \\ 0 \quad -2z=5 & (C'')=(C')-3(B') \end{cases} \quad [S3]$$

Svar

Systemet (S3) är på trappstegsform och har en lösning nämligen $(x,y,z)=(-3, 3/2, -5/2)$; jfr med (Ex 7) på sidan 6.

OBS För att Gausseliminationen ska fungera måste vi veta att systemen (S1), (S2) och (S3) har samma lösning (x,y,z), dvs de är ekvivalenta.

"Bevis" Antag att (x,y,z) är en lösning till (S1), dvs uppfyller (A), (B) och (C). Då uppfyller (x,y,z) även $(A') = (A)$ och

$$(B'): \quad y+z = \underbrace{(3x+4y-2z)}_{=2 \text{ jfr } (B)} - 3\underbrace{(x+y-z)}_{=1 \text{ jfr } (A)} = -1$$

$$(C'): \quad 3y+z = \underbrace{(-2x+y+3z)}_{=0 \text{ jfr } (C)} + 2\underbrace{(x+y-z)}_{=1} = 2$$

På motsvarande sätt gäller omvänt att om (x,y,z) är en lösning till (S2) så löser (x,y,z) även (S1). kontrollera själv!

~~Sammanfattningen~~ Slutsats (S1) och (S2) är ekvivalenta system. På samma sätt visar vi att (S2) är ekvivalent med (S3), vilket ger att (S1) är ekvivalent med (S3). $\square$

Resonemanget ovan gäller för alla linjära ekvationssystem och vi har följande sats:

Sats (1, sidan 9 i boken) Lösningsmängden till ett linjärt ekvationssystem ändras inte om man

i) kastar om ordningen på ekvationerna.

ii) multiplicerar en ekvation med ett tal $\neq 0$.

iii) adderar en multipel av en ekvation till en annan.

Avslutningsvis undersöker vi hur Gausseliminationen ser ut för system som har oändligt många lösningar / saknar lösningar.

Ex 8

$$\begin{cases} -2y + 6z = -4 & (A) \\ x + y + 2z = 3 & (B) \\ 2x + 3y + z = 8 & (C) \end{cases}$$

Lösning – x saknas i (A), kasta om ekvationerna:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 3 & (A') = (B) \\ 2x + 3y + z = 8 & (B') = (C) \\ -2y + 6z = -4 & (C') = (A) \end{cases}$$

Eliminera x ur (B'): (C') har ju inget x i sig...

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 3 & (A'') = (A') \\ y - 3z = 2 & (B'') = (B') - 2(A') \\ -2y + 6z = -4 & (C'') = (C') \end{cases}$$

Eliminera y ur (C''):

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 3 & (A''') = (A'') \\ y - 3z = 2 & (B''') = (B'') \\ \underline{0 = 0} & (C''') = (C'') + 2(B'') \end{cases}$$

Ekvationen $0 = 0$ kan tolkas tex som $0 \cdot z = 0$, vilken uppfylls av alla värden på z. Vi sätter därför

$z = t$ (t är ett godtyckligt tal, kallas parameter).

Detta ger $(x, y, t) = (1 - 5t, 2 + 3t, t)$ där $t \in \mathbb{R}$, dvs oändligt många lösningar!

OBS Valet av parameter kan göras på olika vis!

Tex fungerar $x = 237 + \pi^2 s$, med $s \in \mathbb{R}$, lika bra.

Ex 9

$$\begin{cases} x+y+z=1 & (A) \\ x+y+z=0 & (B) \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=1 & (A')=(A) \\ \underline{0=-1} & (B')=(B)-(A) \end{cases}$$

Systemet saknar lösning, då ekvationen $0=-1$ aldrig är uppfylld.

3) Introduktion till matriser

Vi kan också passa på att introducera ett kompakt skrivsätt för linjära ekvationssystem:

Def. En matris är ett rektangulärt schema av tal

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ kolonner}} \Bigg\} m \text{ rader}$$

Ex 10 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ har 2 rader och 3 kolonner

(sägs vara ~~av~~ en 2×3 matris).

Addition sker elementvis, tex

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

OBS: Matriserna måste vara av samma typ ($m \times n$)

Multiplikation med skalär sker också elementvis, tex

$$\pi \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation av två matriser

På plats $(\overset{\text{rad}}{j}, \overset{\text{kolonn}}{k})$ i produkten AB kombinerar vi rad j från A och kolonn k från B på följande sätt:

Ex 11

$$\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 1\cdot 2 + 2\cdot 0 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 3 & 3\cdot 2 + 4\cdot 0 \\ 5\cdot 1 + 6\cdot 3 & 5\cdot 2 + 6\cdot 0 \end{pmatrix} = \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 15 & 6 \\ 23 & 10 \end{pmatrix}}$$

OBS Funkar bara då antalet kolonner i A = antalet rader i B.

Ex 12

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}}_{2\times \boxed{3 \neq 2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

är inte definierad!

OBS Om A är en $p\times q$ matris och B en $q\times r$ matris så är AB en $p\times r$ matris (jfr med Ex 11).

Ex 13 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allmänt $AB \neq BA$ och $A \neq 0, B \neq 0$ men BA kan vara $= 0$!

Matriser och linjära ekvationssystem

Ex 14 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\underline{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Då är $A\underline{X} = \underline{Y} \iff$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{3 \times \boxed{3 \text{ ok } 3} \times 1} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ 3x + 4y - 2z \\ -2x + y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff$ ← jfr radvis

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = 2 \\ -2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

← Vårt linjära ekvationssystem ifrån Ex 5 !

Allmänt Varje linjärt ekvationssystem kan skrivas som en ekvation med formen

$$A \underline{X} = \underline{Y}$$

← högerled

↑ koefficienter ↑ obekanta

"Ta med frågan"

* Kan vi genom att bara studera matrisen A avgöra om $A\underline{X} = \underline{Y}$ har en lösning för varje $\underline{Y}$?
* Kan vi till och med ~~tillordna~~ ta fram ett tal $d(A)$ som svarar på ovanstående fråga (för ett givet A) ?

Läs själva kap 7.2