Matematisk statistik
Matematikcentrum
Lunds universitet

Tentamen 2015-10-23 kl 8^{00}–13^{00}
MASA01:A
Sannolikhetsteori

Till samtliga uppgifter fordras fullständiga svar. Totalt kan man få 100 poäng. Gränsen för godkänd är 50 poäng.

Institutionens papper används både som kladdpapper och som inskrivningspapper. Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Rödpenna får ej användas. Skriv fullständigt namn på alla papper.

Tillåtna hjälpmedel: Statistiska tabeller som innehåller standardiserad normalfördelning.

Results will be known on October 29.

1. Suppose a species of beetle has length 35 millimeters on average. Find an upper bound on the probability that a randomly chosen beetle in this species will be over 80 millimeters long. (*Hint:* use Markov inequality.). (15p)

2. Let $X \sim N(0,1)$, and let Y be independent of X with

$$\mathbf{P}\{Y = 1\} = \mathbf{P}\{Y = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Let $Z = XY$.

a) Find the distribution of Z (e.g., distribution function or density, and name the class of the distribution it belongs to.) (15p)

b) Compute $Cov(X, Z)$ (15p)

c) Are X and Z dependent? (Provide a proof of your statement.) (20p)

3. One has 50 light bulbs whose lifetimes are independent exponentially distributed random variables with mean 10 hours. The bulbs are used one at a time with a failed bulb being replaced immediately by a new one. Use the central limit theorem to approximate the probability that there is still a working bulb after 600 hours. (15p)

4. Suppose that 3 coins are each tossed until the first head is obtained on each coin and where each coin has probability p of producing a head. If you know that the total number of tails observed is 6, determine the expected number of tails observed on the first coin. (20p)

1. Let X be a r.v. denoting the length of a beetle. We know that

$$X \geq 0 \quad \text{and} \quad EX = 35.$$

Hence, by the Markov inequality

$$P\{X \geq 80\} = \frac{35}{80}$$

Answer: $\frac{7}{16}$

2. a)

$$F_Z(x) = P\{Z \leq x\} = P\{XY \leq x\}$$
$$= P\{XY \leq x \mid Y = 1\} \cdot P\{Y = 1\}$$
$$+ P\{XY \leq x \mid Y = -1\} \cdot P\{Y = -1\}$$
$$= P\{X \leq x\} \frac{1}{2} + P\{-X \leq x\} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= P\{X \leq x\} \cdot \frac{1}{2} + P\{X \geq -x\} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \cdot \frac{1}{2} + \int_{-x}^{+\infty} f_X(t)\,dt \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f_Z(x) = F_Z'(x) = f_X(x) \frac{1}{2} + f_X(-x) \cdot \frac{1}{2}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = f_X(-x)$$

$$\Rightarrow f_Z(x) = f_X(x) \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow Z \in \mathcal{N}(0,1)$$

b) $\mathrm{Cov}(X, Z) = \mathrm{Cov}(X, X \cdot Y) = E(X - EX)(XY - EX\,EY)$

$EY = 0$ and $EX = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X, Z) = E(X^2 Y) = EX^2\, EY = 0$,

where we used independence of X and Y.

c) Consider conditional distribution when $a>0$:

$$P\{Z \le x \mid X=a\} = P\{XY \le x \mid X=a\}$$
$$= P\left\{Y \le \frac{x}{a}\right\}$$

Observe, that for all $x < -a$

$$P\left\{Y \le \frac{x}{a}\right\} = 0,$$

but by result of a)

$$P\{Z \le x\} = P\{X \le x\} > 0 \text{ for all } x,$$

since $X \in \mathcal{N}(0,1)$.

Hence,

$$P\{Z \le x \mid X=a\} \ne P\{Z \le x\}$$

for any $x < -a$ and $a > 0$.

This proves, that Z and X are dependent (otherwise, in case of independence we must have

$$P\{Z \le x \mid X=a\} = P\{Z \le x\}$$

for all x and a.)

3 Let X_i be the life-time of the i-th light bulb. We need

$$P\left\{\sum_{i=1}^{50} X_i > 600\right\}.$$

We know that $m := EX_i = 10$, and

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{10}}}{10}, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Compute

$$\sigma^2 = \operatorname{Var} X_i = E(X_i)^2 - (EX)^2 = 100.$$

Using CLT we derive

$$P\left\{\sum_{i=1}^{50} X_i > 600\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - 50 \cdot m}{\sqrt{50 \cdot \sigma^2}} > \frac{600 - 50 \cdot m}{\sqrt{50 \cdot \sigma^2}}\right\}$$

$$\approx P\left\{Z > \frac{600 - 50 \cdot 10}{\sqrt{50 \cdot 100}}\right\} = P\{Z > \sqrt{2}\}$$

$$= 1 - P\{Z < \sqrt{2}\} \approx 1 - P\{Z < 1.4\} \approx 0.08$$

4 Let X_i, $i = 1, 2, 3$, denotes the number of tails observed on the i-th coin. We need

$$E\{X_1 \mid X_1 + X_2 + X_3 = 6\}.$$

Since X_1, X_2, X_i are i.i.d., we have same conditional distribution

$$P\{X_1 = k \mid X_1 + X_2 + X_3 = 6\} = P\{X_2 = k \mid X_1 + X_2 + X_3 = 6\}$$
$$= P\{X_3 = k \mid X_1 + X_2 + X_3 = 6\}, \quad \forall\, k \geq 0.$$

Hence, we have

$$E\{X_1 \mid X_1 + X_2 + X_3 = 6\}$$
$$= E\{X_2 \mid X_1 + X_2 = X_3 = 6\} = E\{X_3 \mid X_1 + X_2 + X_3 = 6\}.$$

Therefore

$$6 = E\{X_1 + X_2 + X_3 \mid X_1 + X_2 + X_6 = 6\}$$
$$= 3\, E\{X_1 \mid X_2 + X_2 + X_3 = 6\}$$

$$\Rightarrow \quad E\{X_1 \mid X_1 + X_2 + X_3 = 6\} = 2.$$

Answer: 2.

Matematisk statistik
Matematikcentrum
Lunds universitet

Tentamen 2014-10-23 kl 8^{00}–13^{00}
MASA01:A
Sannolikhetsteori

Till samtliga uppgifter fordras fullständiga svar. Totalt kan man få 100 poäng. Gränsen för godkänd är 50 poäng.

Institutionens papper används både som kladdpapper och som inskrivningspapper. Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Rödpenna får ej användas. Skriv fullständigt namn på alla papper.

Tillåtna hjälpmedel: Statistiska tabeller som innehåller standardiserad normalfördelning.

Resultatet anslås 28 oktober.

1. Bestäm täthetsfunktionen för $X - Y$ om X och Y är oberoende s.v. med täthetsfunktionen
$$f_X(x) = f_Y(x) = e^{-x}, \quad x > 0.$$
(15p)

2. Antag att 5 procent av alla män och 0.25 procent av alla kvinnor är färgblinda. Antag också att en viss population består av dubbelt så många män som kvinnor. En färgblind person väljs slumpmässigt ur populationen. Vad är sannolikheten att personen i fråga är en man? (15p)

3. Låt X och Y vara oberoende $N(0,1)$ stokastiska variabler. Ange fördelningarna för $X + Y$ och $(X + Y)/2$. (15p)

4. n gifta par går på fest. Samtliga $2n$ personer placeras helt slumpmässigt bredvid varandra vid ett runt bord. Två eller flera personer av samma kön kan alltså sitta bredvid varandra. Vad är väntevärdet av antalet fruar som har sin man bredvid sig? (15p)

5. Längden i cm hos vissa tillverkade enheter är s.v. X med fördelningsfunktionen
$$F_X(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2, \quad 0 < x < 100.$$
Man sorterar bort alla enheter vars längd överstiger 80 cm. Bestäm täthetsfunktionen för längden av de återstående enheterna. (20p)

6. En kommunikationssystem består av n delar, som var och en fungerar med sannolikheten p, oberoende av varandra. Systemet fungerar effektivt om minst hälften av delarna fungerar.

   Visa att sannolikheten att systemet fungerar effektivt går mot 0 när $n \to \infty$ om $p < 1/2$. (Använd, t.ex., Tjebyshev's olikhet eller STL.) (20p)

1

$$f_{X-Y}(u) = F'_{X-Y}(u)$$

$$F_{X-Y}(u) = P\{X-Y \le u\} = \iint_{x-y \le u} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{u+y} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow f_{X-Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u+y) f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_{\begin{cases} u+y>0 \\ y>0 \end{cases}} e^{-(u+y)} e^{-y}\,dy$$

$$= e^{-u} \int_{y > \max\{0,-u\}} e^{-2y}\,dy$$

$$= \frac{1}{2} e^{-|u|}, \quad u \in \mathbb{R}$$

Svar : $f_{X-Y}(u) = \frac{1}{2} e^{-|u|}, \; u \in \mathbb{R}.$

② Låt

$\#\{\text{man}\} := M$, $\#\{\text{kvinnor}\} =: K$

$$M = F_M \cdot M + (1 - F_M) \cdot M,$$

där $F_M = 5\%$

- procent of färgblinda

$$K = F_K \cdot K + (1 - F_K) \cdot K,$$

dar $F_K = 0.25\%$

och

$$M = 2K$$

$$P\{\text{slump person är en man} \mid \text{slump person är färgblinda}\}$$

$$= \frac{F_M \cdot M}{F_M \cdot M + F_K \cdot K} = \frac{\{\text{antal av f.b. man}\}}{\{\text{antal av f.b.}\}}$$

$$= \frac{F_M \cdot 2K}{F_M \cdot 2K + F_K \cdot K} = \frac{2F_M}{2F_M + F_K} = \frac{40}{41}$$

Svar: $\frac{40}{41}$.

③ X och Y är oberoende $N(0,1)$

$\Rightarrow$ $X+Y$ är $N(E(X+Y), Var(X+Y))$

$\frac{X+Y}{2}$ är $N\left(E\left(\frac{X+Y}{2}\right), Var\left(\frac{X+Y}{2}\right)\right)$

(enligt satsen från kursen)

$E\left(\frac{X+Y}{2}\right) = 0$

$Var\left(\frac{X+Y}{2}\right) = \frac{1}{4} Var(X+Y) = \frac{1}{4}\left(Var(X) + Var(Y)\right)$

från formeln för Variance

oberoende

Svar: $X+Y \sim \mathcal{N}(0, 2)$

$\frac{X+Y}{2} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$

④ Låt

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{om } i\text{-te fru har sin man bredvid sig} \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $X_1, \dots, X_n$ är i. i. d. $Be(p)$,

där

$$p = P\{X_i = 1\} = \frac{2}{2n-1} \quad \left(= \frac{\text{antal tillgoda}}{\text{total antal av plats.}} \right)$$

$\Rightarrow$ Vi letar efter

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{2n}{2n-1}$$

Svar: $\dfrac{2n}{2n-1}$.

$f_{X|X\le 80}(x)$ - ?

$0 < X \le 80 \quad \Rightarrow \quad$ låt $\quad 0 \le x \le 80.$

$$F_{X|X\le 80}(x) = P\{X \le x \mid X \le 80\}$$

$$= \frac{P\{(X \le x) \cap (X \le 80)\}}{P\{X \le 80\}}$$

$$= \frac{P\{X \le x\}}{F_X(80)} = \frac{F_X(x)}{F_X(80)}.$$

$\Rightarrow \quad \forall \quad 0 \le x \le 80$

$$f_{X|X\le 80}(x) = F'_{X|X\le 80}(x) = \frac{f_X(x)}{F_X(80)}$$

Svar: $f_{X|X\le 80}(x) = \begin{cases} \frac{1}{48}\left(1 - \frac{x}{100}\right), & x \in [0,80] \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

$P\{$ systemet fungerar effectivt $\}$

$$= P\left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{n}{2} \right\},$$

där

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{om } i\text{-te delen fungerar} \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

$\Rightarrow X_1, \ldots, X_n$ är i.i.d $Be(p)$,

$p = P\{X_i = 1\}$, och $EX_i = p$.

$$P\left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{n}{2} \right\} = P\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{1}{2} \right\}$$

$$= P\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - p \geq \frac{1}{2} - p \right\}$$

$\frac{1}{2} - p > 0$ om $p < \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$$P\left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{n}{2} \right\} = P\left\{ \frac{1}{n} \sum X_i - p \geq \frac{1}{2} - p \right\}$$

$$\leq P\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - p \right| \geq \frac{1}{2} - p \right\} \longrightarrow 0$$

när $n \to \infty$

p.g.a. S.T.L. som säger att $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - p \right| > \varepsilon \right\} \longrightarrow 0$$

när $n \to \infty$.