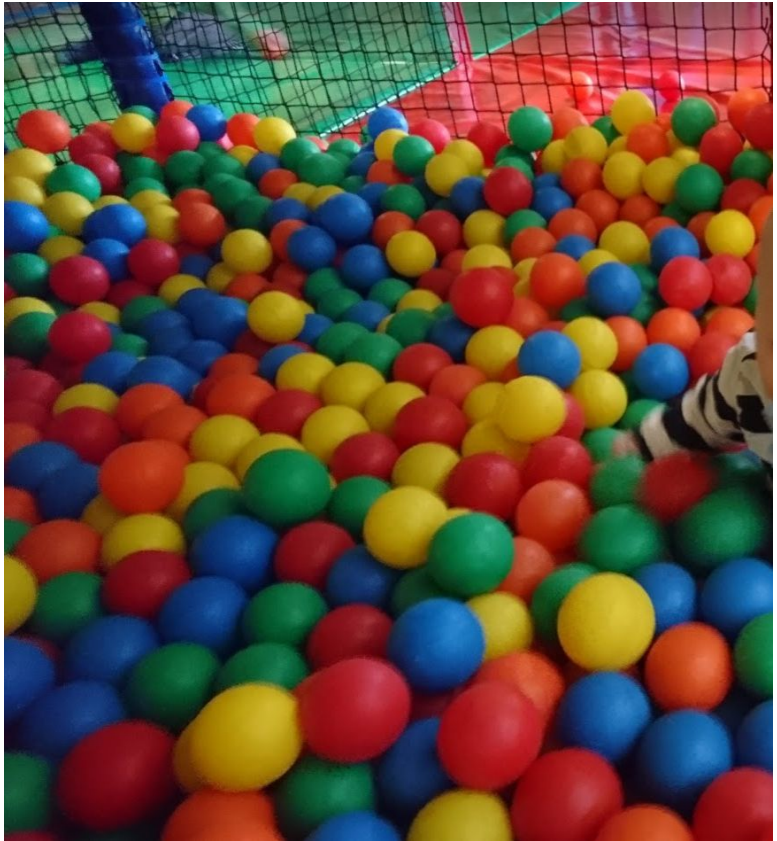
Inledning till statistikteorin

Skattningar och konfidensintervall för μ och σ

Punktskattningar

Stickprov från en population

- Vi vill undersöka bollhavet men får bara göra det genom att ta en boll i taget och sedan lägga tillbaka den igen.
- Frågor vi kan vilja få svar på: Andel blå?, gula?, röda?
- Vikten på bollarna, inte bara medelvärdet utan också spridning och andra egenskaper hos fördelningen.
- Vi kommer aldrig att få ett helt säkert svar, bara uppskattningar.



Definition av skattning

En parameter är ett tal som beskriver populationen. Exempel: andel röda eller medelvikten hos bollarna.

En skattning av en parameter θ är en funktion av stickprovet som avses ge ett närmevärde av θ.

Tar man ett stickprov och räknar antal röda, så blir andelen röda bollar i stickproven en skattning av andelen röda bollar i hela populationen.

I princip skiljer man mellan oändliga och ändliga populationer.

1) Alla gånger en hjärtpatient kan få en viss medicin är en oändlig population. Ett kliniskt försök kan ses som ett stickprov ur denna population.
2) Svenska bilförare över sextiofem är en ändlig population.

Oftast antar man att populationen är i princip oändlig. På så sätt kan man anta att man drar med återläggning.

Statistikteori

Hittills: *sannolikhetsteori:* Om det finns 45 % röda bollar och vi väljer 35 bollar med återläggning, så kommer antalet röda bollar att vara en slumpvariabel

$$X \sim Bin(35, 0.45)$$

De 35 bollarna är ett *stickprov* och sannolikhetsteorin talar om hur det stickprovet beter sig.

Nu: *statistikteori:* Andelen röda bollar är p - ett okänt tal. Vi väljer 35 röda bollar och får 7 röda. Vad kan vi säga om *p*?

De 35 bollarna är ett *stickprov* från *populationen* av bollar.

Stickprovet kan användas för att göra en *skattning* av *parametern p:*

$$\hat{p} = \frac{7}{35} = 0.2$$

Statistikteori

PSMAV	N	HR	p-value
0-25	2212	1	
25-66	960	0.84 (0.73-0.96)	0.013

Punktskattning

Konfidens-intervall

P-värde

θ kan vi aldrig veta exakt, men vi kan information om den genom att ta ett *stickprov.* Ju större stickprov, desto mer information.

Punktskattningen gör man alltid.

Denna gång kommer vi att inrikta oss på *konfidensintervall,* ”felgränser”.

Nästa gång kommer vi att gå in på *P-värdet*, ett tal som anger ”signifikans”. Grovt: ”sannolikheten att resultatet fås av en slump”. Om p-värdet är under 0.05 brukar man kalla resultatet *signifikant.* I exemplet ovan säger man att det finns en signifikant effekt, eftersom $P<0.05$.

En skattning är en slumpvariabel med okända parametrar

I detta fall en parameter θ:

$$X \sim Bin(1,\theta)$$

Stickprovet $X_1,...,X_{35}$ består av oberoende slumpvariabler, fördelade som X, dvs.

$X_i \sim Bin(1,\theta)$.

En *skattning* är en funktion av stickprovet:

$\theta^*=\theta(X_1,...,X_n)$

I detta fall är $\theta^*=\langle X\rangle=(X_1+...+X_n)/n$

När vi talar om stickprovet som slumpvariabler, använder vi stora bokstäver. Vi vet till exempel att $n\theta^* = X_1+...+X_n \sim Bin(n,p)$

När vi talar om stickprovet som värden vi fått, använder vi små bokstäver:

$$x_1,...,x_n.$$

Antag att vi fått 0,0,1,1 och att n = 4. Då är

$$\theta^*=(x_1+...+x_n)/n=(0+0+1+1)/4=1/2.$$

Väntevärdesriktighet

En *skattning* av *μ* är en funktion av stickprovet:

$\theta^*=\theta(X_1,...,X_n)$

I detta fall är $\theta^*=(X_1+...+X_n)/n$.

$E(\theta^*)=\mu$: *Väntevärdesriktig*.

Definition. En skattare θ* av en parameter θ sägs vara *väntevärdesriktig* om $E(\theta^*) = \theta$.

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

$$E(s^2) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) = \sigma^2$$

Om man delar med *n-1* och inte *n*, som känns mer naturligt, så blir skattningen av variansen väntevärdesriktig. (Gäller även icke normalfördelade variabler.)

Effektivitet

$$V(\theta^*)=V[(X_1+...+X_n)/n]=\sigma^2/n$$

$$D(\theta^*)=\sigma/n^{1/2}.$$

Lägg märke till att skattarens standardavvikelse uttrycks i termer av de okända σ. Därför kan vi inte beräkna den.

Det går däremot ofta bra ändå att jämföra två skattares effektivitet.

Ett trivialt exempel är om man skapar en skattare θ** som beräknar medelvärde av alla utom den sista observationen.

$$D(\theta^{**})=\sigma/(n-1)^{1/2}.$$

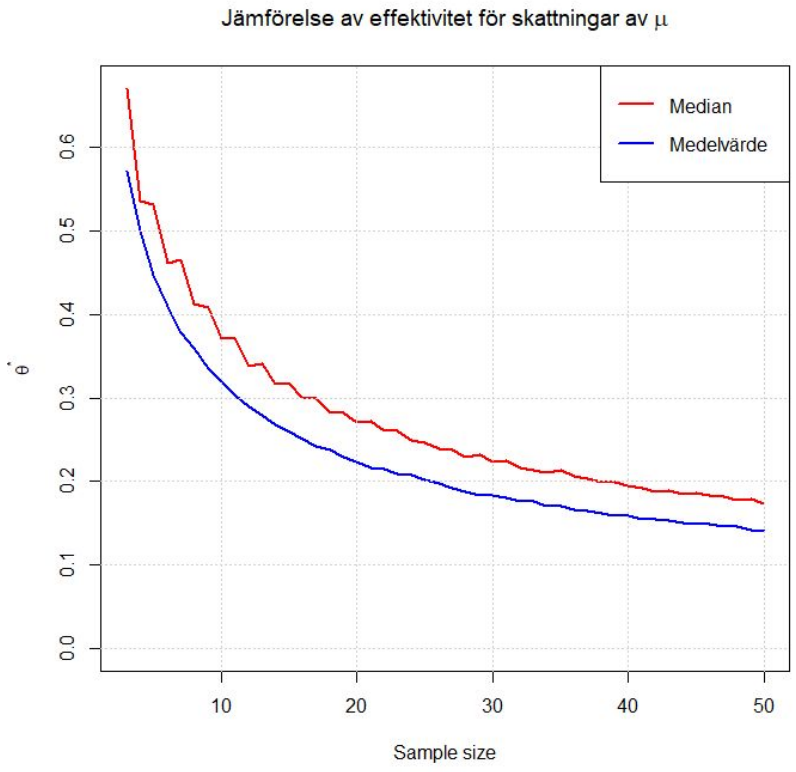
Definition. En väntevärdesriktig skattare θ* sägs vara effektivare än en annan väntevärdesriktig skattare θ** om $V(\theta^*)<V(\theta^{**})$
för alla stickprovsstorlekar n.

Exempel: medelvärde och median.

Studera medelvärdet och medianen. Båda är i normalfördelningsfallet väntevärdesriktiga skattare av μ.

Väntevärdet av medianen är lite snårigt rent matematiskt. Därför simulerar jag fallet μ=0, σ=1. (Det är ganska lätt att se att detta fall täcker alla andra.)

Skillnaden är ganska stor. Medelvärdet av 20 observationer ger samma effektivitet som medianen av 30.



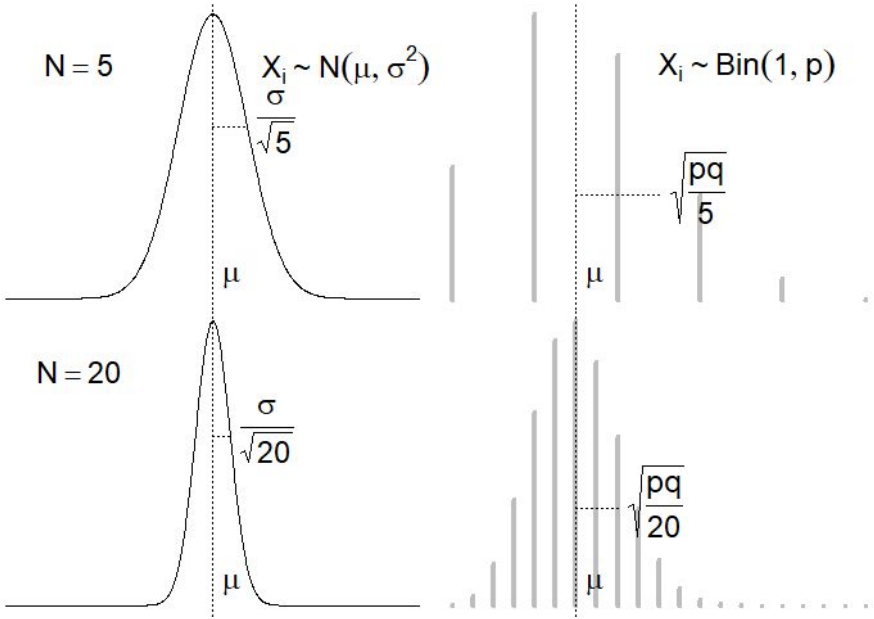
Skattning av μ och p i $N(\mu,\sigma^2)$ och Bin(n,p)

Stickprovet är slumpvariabler $X_1,\ldots,X_n$. Både μ och p skattas med stickprovsmedelvärdet.

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad D(\bar{X}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

σ är standardavvikelsen för en observation.

”Medelvärdet av många observationer är en bättre skattare än medelvärdet av få observationer.” (Visste vi ju …)



Om standardavvikelsen är känd ...

… är det faktiskt lätt.

Den sista raden visar att följande intervall täcker μ med sannolikhet 1-α.

$$\left(\bar{X} - \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \ \bar{X} + \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Detta kallas för ett *konfidensintervall* med konfidensgrad 1-α.

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\bar{X} - \mu \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$1 - \alpha = P\left(-\lambda_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\mu - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \lambda_{\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$P\left(\bar{X} - \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Exempel

Vi vet att följande värden kommer från en N(3,0.01)-fördelning (andra argumentet är *varians.*):

3.05, 3.03, 3.01

Beräkna ett 95 % konfidensintervall!

Lösning: Beräkna medelvärdet: 3.03

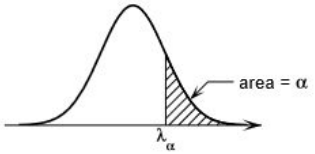
σ=0.1 (=$0.01^{1/2}$)

För att hela konfidensnivån ska vara 95 % behövs α=0.05.

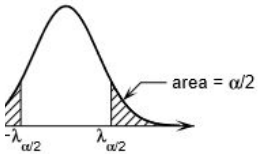
Tabell 2. Normalfördelningens kvantiler

$P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$ där $X \in N(0,1)$

α	λ_α	α	λ_α
0.1	1.2816	0.001	3.0902
0.05	1.6449	0.0005	3.2905
0.025	1.9600	0.0001	3.7190



$$\left(\bar{X} - \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \ \bar{X} + \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$



$\lambda_{0.025}$=1.96.

Konfidensintervall:

3.03±1.96*0.1 /$3^{1/2}$.

(2.92,3.14) I Matlab:

```
>> 3.03+[-1,1]*1.96*0.1 /sqrt(3)
ans =

   2.9168   3.1432
```

Om man inte vill lösa approximativt

$$\left(\bar{X} - \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \ \bar{X} + \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Det går visserligen att uppskatta σ, men då blir inte konfidensintervallet exakt. Detta är ett problem särskilt för små stickprov.

$$\left(\bar{X} - \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \ , \ \bar{X} + \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

???

För binomialfördelningen brukar man uppskatta standardavvikelsen som man har ett stort stickprov. I annat fall behövs specialmetoder som inte täcks av denna kurs.

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$$

Vi kommer att behöva nya fördelningar för att lösa problemet, men det är lösbart.

Normalfördelningens släktningar: Chi-två, t och F.

Nya fördelningar

Fördelningar som definieras i termer av oberoende normalfördelade variabler.

Ett enkelt exempel är *Maxwellfördelningen*, som definieras som fördelningen för

$Y = Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2$,

Där Z_i är oberoende och normalfördelade N(0,1).

Minns att molekylers hastighetskomponenter i en gas är normalfördelade. Då blir Y proportionell mot rörelseenergin enligt formeln $E=mv^2/2$.

(Maxwellfördelningen som sådan inte viktig. Samma som $\chi^2(3)$.)

Tre fördelningar

Låt $Z_0, Z_1, \dots Z_f$ och $W_1, \dots, W_g$ vara oberoende och alla fördelade som N(0,1). Då definieras:

1) $\chi^2(f)$, "Chi-två med f frihetsgrader", är fördelningen för

$$\sum_{i=1}^{f} Z_i^2$$

2) $t(f)$, "t med f frihetsgrader", är fördelningen för

$$\frac{Z_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^{f} Z_i^2 / f}}$$

3) F(f,g), "F med f och g frihetsgrader", är fördelningen för

$$\frac{\sum_{i=1}^{f} Z_i^2 / f}{\sum_{i=1}^{g} W_i^2 / g}$$

(F betonas inte i denna kurs.)

Dessa tre fördelningar bildar basen för den grundläggande, normalfördelningsbaserade statistiken.

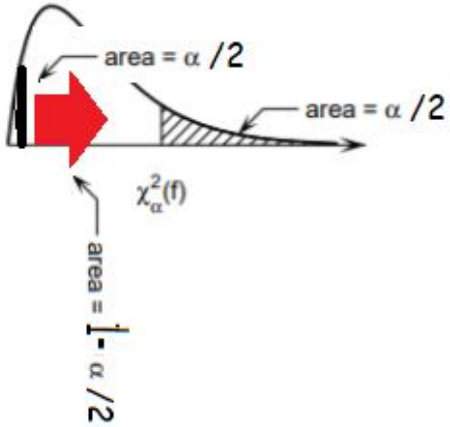
För att beräkna sannolikheter för dessa behövs vanligen dator, men oftast räcker kvantilerna långt, och de finns i tabeller för standardvärden.

Övning

Bestäm gränser så att

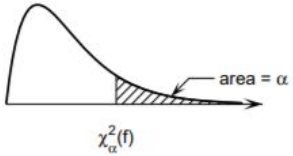
$P(a<Z<b)=5\ \%$ om $Z \sim \chi^2(9)$

Om, vilket i och för sig inte är nödvändigt, man vill ha 2.5 procent till höger om *b* och 2.5 % till vänster om a, så letar man efter $\chi^2_{0.025}(9)$ och $\chi^2_{0.975}(9)$. a=2.7 och b = 19.02.



Tabell 4. χ^2**-fördelningen**

$P(X > \chi^2_\alpha(f)) = \alpha$ där $X \in \chi^2(f)$



f \ α	0.9995	0.999	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.84	5.02	6.63	7.88	10.83	12.12
2	0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.10	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82	15.20
3	0.02	0.02	0.07	0.11	0.22	0.35	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27	17.73
4	0.06	0.09	0.21	0.30	0.48	0.71	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47	20.00
5	0.16	0.21	0.41	0.55	0.83	1.15	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52	22.11
6	0.30	0.38	0.68	0.87	1.24	1.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46	24.10
7	0.48	0.60	0.99	1.24	1.69	2.17	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32	26.02
8	0.71	0.86	1.34	1.65	2.18	2.73	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12	27.87
9	0.97	1.15	1.73	2.09	2.70	3.33	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88	29.67
10	1.26	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59	31.42

Exempel -rekapitulera från normalfördelning

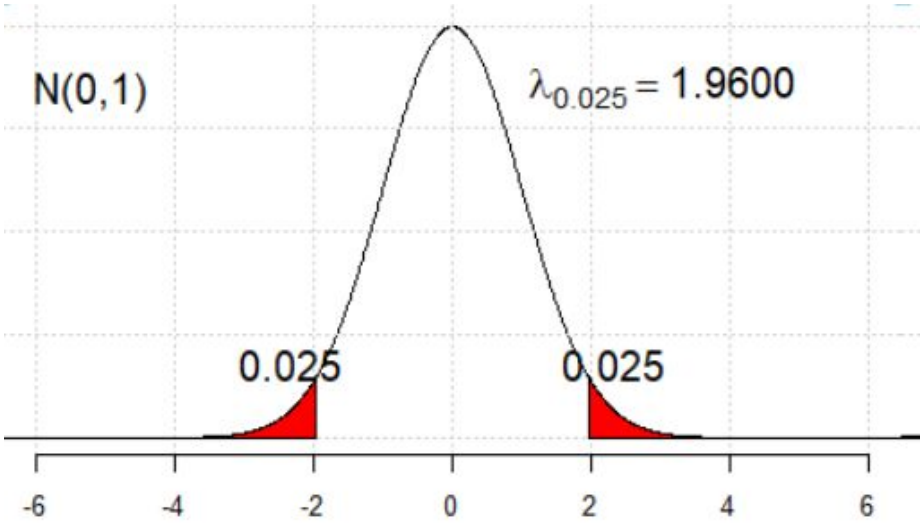
Finn ett värde *c* så att $P(|X|>0.05)=0.05$

$X \sim N(0,1)$

Lösning: Då gäller $P(|X|>\lambda_{0.025})=P(X<-\lambda_{0.025})+P(X>\lambda_{0.025})=$

$0.025+0.025=0.05$.

För att få en gräns så att bara 5 % av sannolikhetsmassan ligger utanför, väljer man 2.5 %-gränser åt båda hållen.

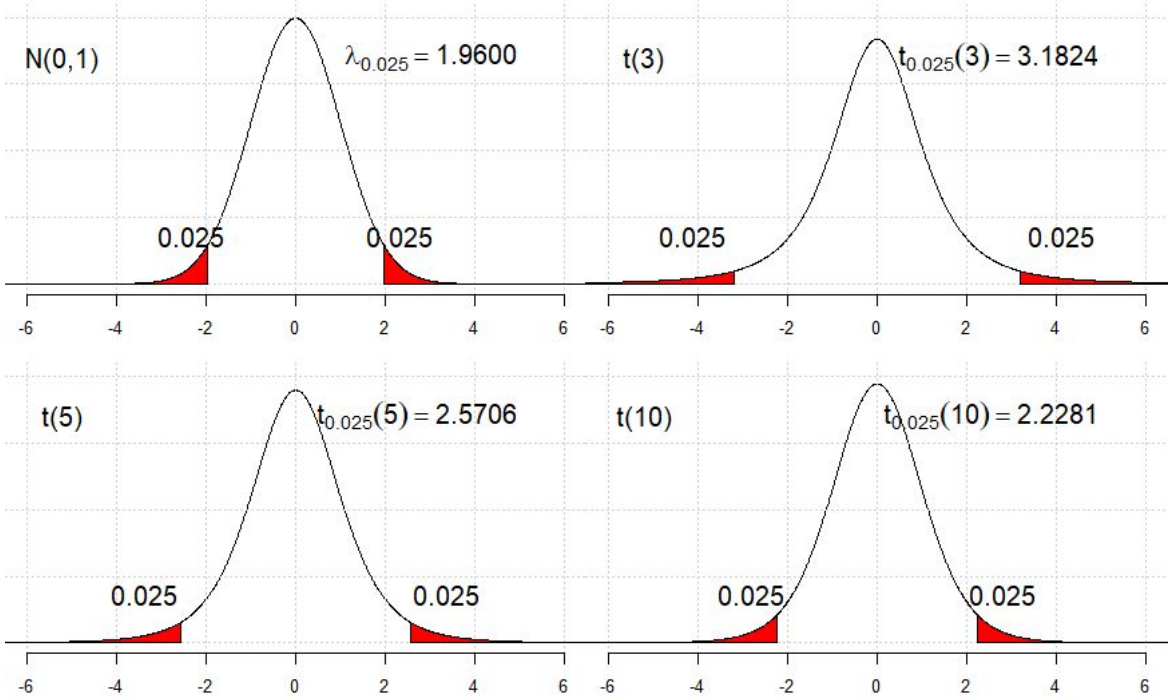


Exempel - detta är inte svårare för t-fördelningen

T-fördelningen är symmetrisk precis som normalfördelningen N(0,1) och liknar denna alltmer ju fler *frihetsgrader* dem har.

$P(|X|>t_{0.025}(f))=$

$P(X<-t_{0.025}(f))+P(X>t_{0.025}(f))$



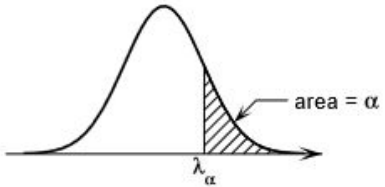
”Nästan normal”

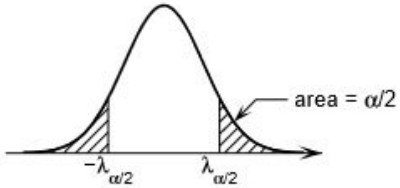
Ju fler antal ”frihetsgrader”, desto mer likt normalfördelningen.

Tabell 2. Normalfördelningens kvantiler

$P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$ där $X \in N(0, 1)$

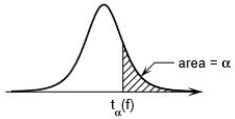
α	λ_α	α	λ_α
0.1	1.2816	0.001	3.0902
0.05	1.6449	0.0005	3.2905
0.025	1.9600	0.0001	3.7190
0.01	2.3263	0.00005	3.8906
0.005	2.5758	0.00001	4.2649





Tabell 3. t-fördelningen

$P(X > t_\alpha(f)) = \alpha$ där $X \in t(f)$



f \ α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	22.33	31.60
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.41
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.02	4.44
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.35	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.50	3.79
23	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.73
26	1.31	1.71	2.06	2.48	2.78	3.43	3.71
27	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.41	3.67
29	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	3.16	3.37
∞	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29

Geometrisk motivering

Låt oss tänka en stund på geometri!

$X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ i=1,2,...n, oberoende.

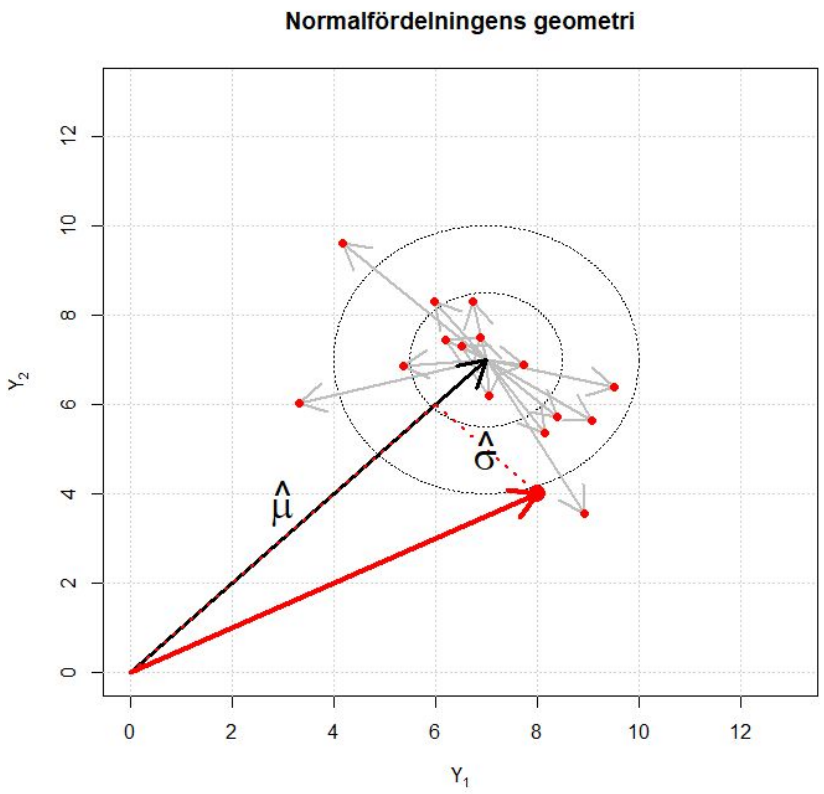
Y-värdena fås alltså av en konstant vektor till vilken adderas normalfördelade fel. μ och σ är okända

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix},$$

där $Z_1, \dots, Z_n$ är oberoende och standardiserat normalfördelade.

Något av överkurs

- Detta är en tvådimensionell illustration.
- Princip: Det resultat man får (den röda pilen) delas upp i en vektorsumma av en vektor parallell med [1,1] och en vinkelrät med den.
- Den parallella vektorn används för att skatta μ.
- Den vinkelräta vektorn blir likvärdig med en vektor som består av n-1 oberoende $N(0,\sigma^2)$-komponenter.
- Informellt: 1 *frihetsgrad* går åt till att skatta μ. Det finns n-1 frihetsgrader kvar för att skatta σ.



$D(X+Y)^2=D(X)^2+D(Y)^2$

Väntevärden är väldigt lätta:

$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

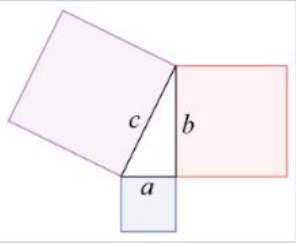
Standardavvikelser är lite knepigare, men Pythagoras' sats ger en minnesregel.

$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.

Gauss's Pythagorean right triangle proposal is an idea attributed to Carl Friedrich Gauss for a method to signal extraterrestrial beings by constructing an immense right triangle and three squares on the surface of the Earth. The

e Pythagorean theorem,

ing with Gauss, with exact
tail, and even whether Gauss
. Many of the earliest
ıtor, instead crediting a
escriptors, and in some
s of the proposal also
rtheless, Gauss's writings
ontact extraterrestrial life,
ed light using a heliotrope, his
s of the Moon.



Visual representation of the Pythagorean theorem. Under the proposal the shape seen here would be drawn at vast size on the Siberian tundra using pine trees and fields of wheat.

Proposal [edit]

Carl Friedrich Gauss is credited with an 1820 proposal[1] for a method to signal extraterrestrial beings in the form of drawing an immense right triangle and three squares on the surface of the Earth, intended as a symbolical representation of the Pythagorean theorem, large enough to be seen from the Moon or Mars. Details vary between sources, but typically the "drawing" was to be constructed on the Siberian tundra, and made up of vast strips of pine forest forming the right triangle's borders, with the interior of the drawing and exterior squares composed of fields of wheat.[2] Gauss is said to have been convinced that Mars harbored intelligent life and that this geometric figure, invoking the Pythagorean theorem through the squares on the outside borders[3] (sometimes called a "windmill diagram", as originated by Euclid),[4] would demonstrate to such alien observers the reciprocal existence of intelligent life on Earth and its grounding in mathematics.[5] Wheat was said to be chosen by Gauss for contrast with the pine tree borders "because of its uniform color".[6]

Analysen kan reduceras till oberoende N(0,1)-variabler

Om $Z_1,...Z_n$ är oberoende N(0,1)-variabler, så gäller:

$Z_1^2+...+Z_n^2 \sim \chi^2(n)$

Om $U_1,...,U_n$ är oberoende $N(0,\sigma^2)$-variabler, så gäller:

$(U_1^2+...+U_n^2)/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$

Om $Y_1,...,Y_n$ är oberoende $N(\mu,\sigma^2)$-variabler, så gäller, oberoende av μ:

$[(Y_1-\langle Y\rangle)^2+...+(Y_n-\langle Y\rangle)^2]/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$

χ^2-fördelning med *n* frihetsgrader

$Z \sim \chi^2(n)$

$E(Z)=n.$

$E[(Y_1-\langle Y\rangle)^2+\ldots+(Y_n-\langle Y\rangle)^2]/\sigma^2=n-1$

Alltså:

$E[\{(Y_1-\langle Y\rangle)^2+\ldots+(Y_n-\langle Y\rangle)^2\}/(n-1)]=\sigma^2$

Det vill säga: Stickprovsstandardavvikelsen är en väntevärdesriktig skattning av σ^2.

(Däremot finns ingen väntevärdesriktig skattare av $\sigma=(\sigma^2)^{1/2}$)

Vi har två mätserier:

1) 18.50 11.53 24.68 8.77 (x_1,x_2,x_3,x_4)

2) 44.14 52.54 54.26 (y_1,y_2,y_3)

Vi har anledning att tro att de kommer från N(μ_1,σ^2) resp N(μ_2,σ^2). Notera att det är samma σ^2! Skatta σ^2!

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 = 153.78; \sum_{i=1}^{3}(y_i - \bar{y})^2 = 58.64$$

Lösning

$$E\left(\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2\right)=(n_1-1)\sigma^2$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2\right)=(n_2-1)\sigma^2$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2\right)=(n_1-1)\sigma^2+(n_2-1)\sigma^2$$

$$E\left(\frac{1}{(n_1+n_2-2)}\left(\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2\right)\right)=\sigma^2$$

s^2=(153.78+58.64)/(4+3-2)=42.48

Ss = 6.51

Konfidensintervall för σ

Konfidensintervall för σ

Antag att $X_1, X_2, \dots, X_n$ är oberoende och normalfördelade med parametrar μ och σ.

$$\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} = \frac{(X_i - \mu)}{\sigma} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i - \mu)}{\sigma} =$$

$$Z_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\,, \text{där } Z_i \sim N(0,1)$$

$$Z_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i = Z_i - \bar{Z}, \text{där } Z_i \sim N(0,1)$$

För en standardiserad normalfördelning gäller:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2 \sim \chi^2(n-1),$$

Där $\chi^2(n-1)$ är en känd fördelning som finns i tabeller.

Kvantiler för χ^2-fördelningen ger ett konfidensintervall

Vill man ha σ istället, drar man roten ur båda sidor.

$$1-\alpha = P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

$$1-\alpha = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

Matematisk teknik: 1) Skapa ett uttryck, där den önskade parametern ingår, som har en fördelning oberoende av parametern.
2) Stuva om i uttrycket så att gränser för parametern ges som en sannolikhet.

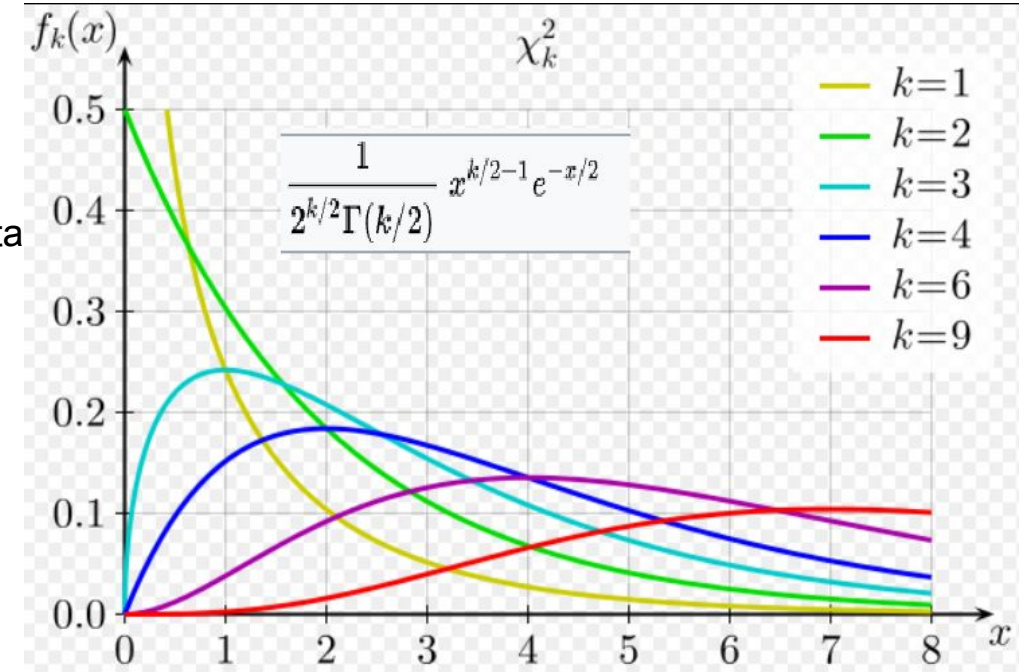
$\frac{\alpha}{2}$

χ^2-fördelningen

Om S~χ^2(n), så gäller

E(S)=n.

- Dess fördelning har man sällan direkt nytta av, däremot dess kvantiler.
- χ^2(n) är kvadratsumman av *n* oberoende N(0,1)-variabler.



Sovdata från ”Students” originalartikel

Patient		*Additional hours' sleep gained by the* 1 (Dextro-)	
1		+0.7	
2		−1.6	
3		−0.2	
4		−1.2	
5		−0.1	
6		+3.4	
7		+3.7	
8		+0.8	
9		0	
10		+2.0	
	Mean	+0.75	Mean
	S.D.	1.70	S.D.

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 34.43; \sum_{i=1}^{10} x_i = 7.5$$

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \frac{1}{10}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)^2 =$$

$$34.43 - \frac{7.5^2}{10} = 28.805$$

Konfidensintervall för σ och σ^2

I_{σ^2}=

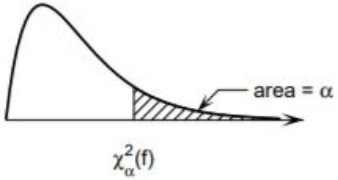
(28.085/19.02,28.085/2.70)=

(1.48,10.40)

I_{σ}=(1.22,3.23)

Tabell 4. χ^2**-fördelningen**

$P(X > \chi^2_\alpha(f)) = \alpha$ där $X \in \chi^2(f)$



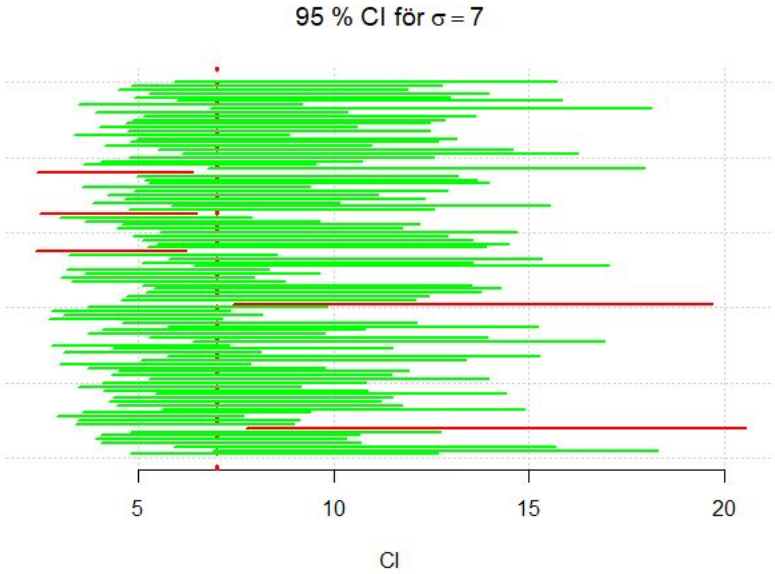
f \ α	0.9995	0.999	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.84	5.02	6.63	7.88	10.83	12.12
2	0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.10	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82	15.20
3	0.02	0.02	0.07	0.11	0.22	0.35	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27	17.73
4	0.06	0.09	0.21	0.30	0.48	0.71	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47	20.00
5	0.16	0.21	0.41	0.55	0.83	1.15	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52	22.11
6	0.30	0.38	0.68	0.87	1.24	1.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46	24.10
7	0.48	0.60	0.99	1.24	1.69	2.17	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32	26.02
8	0.71	0.86	1.34	1.65	2.18	2.73	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12	27.87
9	0.97	1.15	1.73	2.09	2.70	3.33	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88	29.67
10	1.26	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59	31.42
11	1.59	1.83	2.60	3.05	3.82	4.57	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26	33.14
12	1.93	2.21	3.07	3.57	4.40	5.23	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91	34.82

Konfidensintervall

Ett konfidensintervall med konfidensgrad 1-α är ett intervall som täcker det korrekta värdet med sannolikhet 1-α.

Man brukar välja α=0.05.

Simuleringstest för n = 10



Konfidensintervall för μ

Poängen med t-fördelningen

Om vi bara kände σ, så skulle det vara hur lätt som helst att göra ett konfidensintervall när vi har oberoende, normalfördelade observationer från en normalfördelning $X_1,...,X_n$.

Vi vet ju att

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1); P\left(-\lambda_{\alpha/2} \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \lambda_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\lambda_{\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\lambda_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Byt normal- mot t-kvartiler!

Det är tänkbart att ersätta σ med uppskattningen

$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$, men från undersökningen av konfidensintervallen vet vi att detta är en dålig uppskattning av σ.

Lösning: $\frac{\bar{X}-\mu}{s} \sim t(n-1)$ frihetsgrader.

$$P\left(\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \mu < \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

Sovdata från ”Students” originalartikel - KI för μ

Patient		*Additional hours' sleep gained by the* 1 (Dextro-)	
1		+0.7	
2		−1.6	
3		−0.2	
4		−1.2	
5		−0.1	
6		+3.4	
7		+3.7	
8		+0.8	
9		0	
10		+2.0	
	Mean	+0.75	Mean
	S.D.	1.70	S.D.

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 34.43; \sum_{i=1}^{10} x_i = 7.5$$

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \frac{1}{10}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)^2 =$$

$$34.43 - \frac{7.5^2}{10} = 28.805$$

Sovdata från ”Students” originalartikel - KI för μ

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 34.43; \sum_{i=1}^{10} x_i = 7.5$$

$$\bar{x} = \frac{7.5}{10} = 0.75$$

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \frac{1}{10}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)^2 =$$

$$34.43 - \frac{7.5^2}{10} = 28.805$$

$$s^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{28.805}{9} = 3.201$$

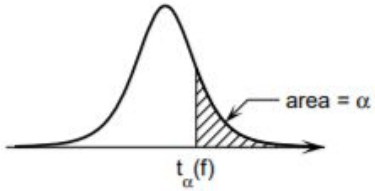
$$s = \sqrt{3.201} = 1.78901.$$

Ett konfidensintervall

$$0.75 \pm 2.26 * \frac{1.78901}{\sqrt{10}} = (-0.53, 2.03)$$

Tabell 3. *t*-fördelningen

$P(X > t_\alpha(f)) = \alpha$ där $X \in t(f)$



f \ α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	22.33	31.60
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.41
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59

På dator är det lite lättare.

```
> t.test(group1)

        One Sample t-test

data:  group1
t = 1.3257, df = 9, p-value = 0.2176
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.5297804  2.0297804
sample estimates:
mean of x
     0.75
```