Matematisk statistik för B, K, N, BME och Kemister

Föreläsning 7

Johan Lindström

18 september 2017

Sammanvägd variansskattning (Kap. 7.4)

Om vi har

$$x_1, \ldots, x_{n_x} \qquad \text{obs. av } X_i \in \mathrm{N}\left(\mu_x, \sigma^2\right)$$
$$y_1, \ldots, y_{n_y} \qquad \text{obs. av } Y_i \in \mathrm{N}\left(\mu_y, \sigma^2\right)$$

kan den gemensamma variansen σ^2 skattas med

$$s_p^2 = \frac{(n_x-1)s_x^2 + (n_y-1)s_y^2}{n_x - 1 + n_y - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{n_x}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_y}(y_i - \bar{y})^2}{n_x + n_x - 2} = \frac{Q}{f},$$
$$\frac{Q}{\sigma^2} \in \chi^2(f)$$

Hypotesprövning (Kap. 7.5)

H_0 **förkastas** om observationerna, ϑ^*, avviker för mycket från **nollhypotesen** ϑ_0.

Testa **nollhypotesen**	$H_0: \ \vartheta = \vartheta_0$
mot **mothypotesen** (tex)	$H_1: \ \vartheta \neq \vartheta_0$

på nivån α; **felrisken** α ges av

$$\alpha = \mathrm{P}(H_0 \text{ förkastas trots att den är sann})$$

Olika metoder för att utföra hypotestest

1. **Direktmetoden eller P-värde** **(Def. 7.35)**
   - Antag att H_0 är sann
   - Räkna ut **P-värdet** $p = \mathrm{P}(\text{Få det vi fått eller värre})$
   - Om $p < \alpha$ förkastas H_0
2. **Konfidensmetoden** **(Kap. 7.5.2)**
   Gör ett konfidensintervall med konfidensgraden $1 - \alpha$ och förkasta H_0 på nivån α om intervallet ej täcker ϑ_0.
   Intervallen skall, beroende på H_1, vara

Test	$H_1: \vartheta < \vartheta_0$	$H_1: \vartheta \neq \vartheta_0$	$H_1: \vartheta > \vartheta_0$
Intervall:	uppåt begr	tvåsidigt	nedåt begr

3. **Testkvantitet $T(X)$ och kritiskt område C** **(Kap. 7.5.3)**
   Förkasta H_0 om testskvantiteten hamnar i det kritiska området.
   C och T skall väljas så att

   $$\alpha = P(T(X) \in C) = P(\text{"Förkasta } H_0 \text{ om } H_0 \text{ är sann"})$$

Normalfördelning, $\vartheta^* \in \mathrm{N}(\vartheta, \mathrm{D}(\vartheta^*))$, $H_0: \vartheta = \vartheta_0$

Testkvantitet (och fördelning under H_0):

$$T = \frac{\vartheta^* - \vartheta_0}{\mathrm{D}(\vartheta^*)} \in \mathrm{N}(0,1), \qquad \mathrm{D}(\vartheta^*) \text{ känd}$$

$$T = \frac{\vartheta^* - \vartheta_0}{d(\vartheta^*)} \in t(f), \qquad \mathrm{D}(\vartheta^*) \text{ okänd}$$

Förkasta H_0 om (kritiska områden)

	$H_1: \vartheta < \vartheta_0$	$H_1: \vartheta \neq \vartheta_0$	$H_1: \vartheta > \vartheta_0$
$\mathrm{D}(\vartheta^*)$ känd	$T < -\lambda_\alpha$	$\lvert T\rvert > \lambda_{\alpha/2}$	$T > \lambda_\alpha$
$\mathrm{D}(\vartheta^*)$ okänd	$T < -t_\alpha(f)$	$\lvert T\rvert > t_{\alpha/2}(f)$	$T > t_\alpha(f)$

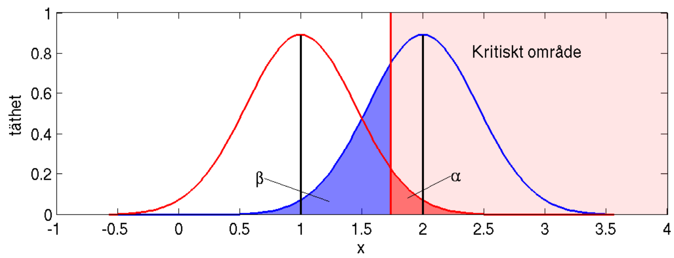
Jfr. kvantiler λ_α eller t_α med konfidensintervallen.

Styrkefunktion (Kap. 7.6)

Användas för att avgöra hur bra testet skiljer H_0 från H_1.

$$h(\vartheta) = \mathrm{P}(\text{"Förkasta } H_0 \text{ om } \vartheta \text{ är rätt värde"})$$

Typ 1 fel: $\alpha = P(H_0$ förkastas om H_0 sann)
Typ 2 fel: $\beta = P(H_0$ förkastas **ej** om H_0 **ej** sann)



Exempel: Rattonykterhet

Gränsen för rattonykterhet är 0.2 ‰. Antag att mätvärdet vid en mätning, x_i, är

$$X_i = \mu + \varepsilon_i$$

där μ är den sanna alkoholhalten och ε_i är oberoende, $\mathrm{N}\left(0, 0.04^2\right)$-fördelade mätfel. För att avgöra om en person är skyldig till rattonykterhet kan man testa hypotesen

$$H_0: \mu = 0.2 \qquad \text{mot} \qquad H_1: \mu > 0.2$$

på nivån $\alpha = 0.001$.

1. Ange i ord vad felrisken

   $$\alpha = \mathrm{P}(\text{Förkasta } H_0 \text{ om } H_0 \text{ är sann})$$

   innebär i hypotestestet ovan.
2. Om man gjort $n = 3$ mätningar och fått medelalkoholhalten till $\bar{x} = 0.24$ ‰, skall man då dömas?
3. Hur högt kan det uppmätta medelvärdet, baserat på tre mätningar, vara utan att man döms?
4. Bestäm styrkefunktionen för testet. Dvs

   $$h(\mu) = \mathrm{P}(H_0 \text{ förkastas om } \mu \text{ är det sanna värdet})$$

5. Om den sanna alkoholhalten är 0.25 ‰, vad är då sannolikheten att **inte** dömas.
6. Hur många mätningar behöver göras för att man med högst $\beta = 20\%$ slh skall frikännas om man har 0.25 ‰.

Model: $X_i \in \mathrm{N}\left(\mu, 0.04^2\right)$, oberoende med $n = 3$.

Skattningar: $\mu^* = \bar{X} \in \mathrm{N}\left(\mu, 0.04^2/n\right)$

Hypotestest: Förkasta H_0 om

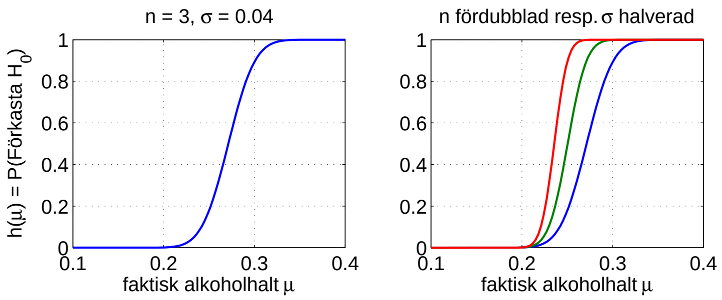
$$T = \frac{\mu^* - \overbrace{\mu_0}^{=0.2}}{0.04/\sqrt{n}} > \underbrace{\lambda_\alpha}_{=\lambda_{0.001}=3.0902}$$

4. Bestäm styrkefunktionen för testet. Dvs

   $$h(\mu) = \mathrm{P}(H_0 \text{ förkastas om } \mu \text{ är det sanna värdet})$$

5. Om den sanna alkoholhalten är 0.25 ‰, vad är då sannolikheten att **inte** dömas.
6. Hur många mätningar behöver göras för att man med högst $\beta = 20\%$ slh skall frikännas om man har 0.25 ‰.

Styrkefunktion för testet av promillehalt ($H_0: \mu = 0.2$)



Den okända sanningen	Nykter	Olovligt påverkad	
Mätresultat $\mu^* = \bar{x}$		Säkerhetsmarginal	Kritiskt område
Slutsats från test	Frikänns		Döms
μ	0	0.2	0.27

Konfidensintervall för μ i $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$

$x_1, \ldots, x_n$ observationer av $X_i \in \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$

σ^2 känd:

$$I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu^* \pm \lambda_{\alpha/2} D(\mu^*)$$

σ^2 okänd:

$$I_\mu = \bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} = \mu^* \pm t_{\alpha/2}(f) d(\mu^*)$$

Ex: Konfidensintervall för p då $X \in \mathrm{Bin}(n, p)$

Vi vill uppskatta hur vanligt det är att det snöar i april i Målilla och konstaterar att under de 300 aprildagarna under perioden 1988–1997 så snöade det under 71 dagar. Antag att olika dagar är oberoende av varandra.

Beräkna ett approximativt 95% konfidensintervall för sannolikheten att det snöar en slumpmässigt vald aprildag i Målilla.

Konfidensintervall (Kap. 9.1.2 & 9.2.2 & 9.3.2)

Ett **konfidensintervall** för en parameter ϑ täcker rätt värde på ϑ med sannolikheten $1-\alpha$.

$1-\alpha$ kallas **konfidensgrad**. Vanliga värden är 0.95, 0.99 och 0.999.

Normalfördelad skattning, $\vartheta^* \in \mathrm{N}\left(\vartheta, \mathrm{V}(\vartheta^*)\right)$

$\mathrm{D}(\vartheta^*)$ **känd:** $I_\vartheta = \vartheta^* \pm \lambda_{\alpha/2}\mathrm{D}(\vartheta^*)$

$\mathrm{D}(\vartheta^*)$ **okänd:** $I_\vartheta = \vartheta^* \pm t_{\alpha/2}(f)d(\vartheta^*)$

Normalapproximation, $\vartheta^* \underset{\sim}{\in} \mathrm{N}\left(\vartheta, \mathrm{V}(\vartheta^*)\right)$ (Ex: CGS)

$\mathrm{D}(\vartheta^*)$ **känd:** $I_\vartheta = \vartheta^* \pm \lambda_{\alpha/2}\mathrm{D}(\vartheta^*)$

$\mathrm{D}(\vartheta^*)$ **okänd:** $I_\vartheta = \vartheta^* \pm \lambda_{\alpha/2}d(\vartheta^*)$ (alltid λ-kvantil)