Matematisk statistik för B, K, N, BME och Kemister

Föreläsning 4

Johan Lindström

6 september 2017

Repetition
- Linjärkombination
- Centrala gränsvärdessatsen
- Standardfördelningar
- Exempel

Gauss approximation
- Flera variabler
- Exempel

Delta metoden
- Exempel

Repetition
- Linjärkombination
- Centrala gränsvärdessatsen
- Standardfördelningar
- Exempel

Gauss approximation
- Flera variabler
- Exempel

Delta metoden
- Exempel

Linjärkombination (Kap. 3.5.4)

- $E(aX+b) = aE(X)+b$
- $V(aX+b) = a^2V(X)$
- $D(aX+b) = |a|D(X)$
- $E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$
- $V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i)$ om oberoende

Centrala gränsvärdessatsen CGS (Kap. 4.5)

Om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende likafördelade stokastiska variabler med $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$ så är

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{\approx}{\in} \mathrm{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right) \qquad \text{då } n \text{ stort} \quad (n \to \infty)$$

1. Om $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ gäller $Y \underset{\approx}{\in} \mathrm{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right)$
2. Om $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ gäller $\overline{X}_n \underset{\approx}{\in} \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Exempel: Centrala gränsvärdessatsen CGS

Man gör n oberoende mätningar, $x_1,\ x_2,\ \cdots x_n$, av en stokastisk variabel X. Mätningarna betraktas som observationer.
Vilka av följande påståenden är sanna?

- 100 mätningar från X kommer vara approximativt normalfördelade enligt CGS.
- Summan av 100 mätningar från X kommer vara approximativt normalfördelade enligt CGS.
- Medelvärdet av 100 mätningar från X kommer vara approximativt normalfördelade enligt CGS.
- Medelvärdet av 5 mätningar från X kommer vara approximativt normalfördelade enligt CGS.

Standardfördelningar (Kap. 3.6 & 6)

Normal $X \in \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$

Exponential $X \in \mathsf{Exp}(a)$

Rektangel $X \in \mathsf{R}(a, b)$

Binomial $X \in \mathsf{Bin}(n, p)$

Poisson $X \in \mathsf{Po}(\mu)$

Exempel: Binomial

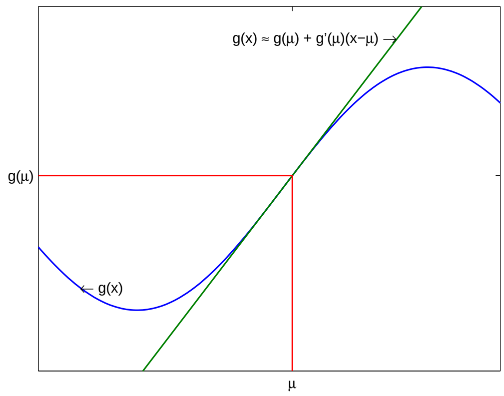
Vid massproduktion av en mekanisk detalj är sannolikheten att en enhet är defekt 0.01. Vidare går enheter sönder oberoende av varandra. Enheterna förpackas i lådor om 100 st. Bestäm sannolikheten att garantivillkoret, "Högst 100 av lådorna i ett parti om 1000 innehåller fler än en defekt enhet" är uppfyllt.

Repetition
- Linjärkombination
- Centrala gränsvärdessatsen
- Standardfördelningar
- Exempel

Gauss approximation
- Flera variabler
- Exempel

Delta metoden
- Exempel

Linjärisering av $g(x)$ kring punkten $\mu = E(X)$



Gauss approximationsformler i en variabel (Kap. 5.2.1)

$Y = g(X)$. Taylorutveckla funktionen g kring $\mu = E(X)$

$$g(X) \approx g(\mu) + (X - \mu)g'(\mu) \quad \Longrightarrow$$

- $E(Y) \approx g(E(X))$
- $V(Y) \approx g'[E(X)]^2 V(X)$

Exempel:
Låt $E(X) = \mu$ och $V(X) = \sigma^2$.

a) Bestäm approximativt väntevärde och varians för $Y = g(X) = \pi X^2$.

b) Bestäm väntevärdet för Y utan approximation.

Gauss approximationsformler i n variabler (Kap. 5.2.2)

För en funktion av n variabler fås på samma sätt
$Y = g(X_1, \ldots, X_n)$

$$\begin{aligned} E(Y) &\approx g(E(X_1), \ldots, E(X_n)) \\ V(Y) &\approx \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \, V(X_i) + \underbrace{2 \sum_{i<j} c_i \, c_j \, C(X_i, X_j)}_{=0 \text{ om } X_i \text{ oberoende}} \end{aligned}$$

där $c_i = \dfrac{\partial g}{\partial x_i}\Big(E(X_1), \ldots, E(X_n)\Big)$

Exempel

Låt X, Y vara två oberoende stokastiska variabler med väntevärde och varians: $E(X) = \mu_x$, $E(Y) = \mu_y$, $V(X) = \sigma_x^2$, samt $V(Y) = \sigma_y^2$.

Bestäm approximativa väntevärde och variansen för $X \cdot Y$.

Uttryck svaren i μ_X, μ_Y, σ_x^2 och σ_y^2.

Repetition
Linjärkombination
Centrala gränsvärdessatsen
Standardfördelningar
Exempel

Gauss approximation
Flera variabler
Exempel

Delta metoden
Exempel

Delta metoden (CGS + Gaussapproximation)

Om $X_1, X_2, \dots, X_n$ är oberoende lika fördelade variabler med $E(X_i) = \mu,\ V(X_i) = \sigma^2$ så gäller att

$$g(\overline{X}_n) \underset{\sim}{\in} \mathrm{N}\left(g(\mu), \left|g'(\mu)\right|^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{då } n \text{ stort.}$$

Exempel: Mätning av tyngdacceleration

Tyngdaccelerationen, g, skattas genom att mäta den tid, t, det tar för en kula att falla $s = 1$ m. Från fysiken vet vi att:

$$s = \frac{gt^2}{2} \qquad g = \frac{2s}{t^2} \qquad t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

Anta att varje mätning, T_i, är oberoende och rektangelfördelade kring det rätta värdet med en osäkerhet på ± 0.05 s.

Bestäm variansen av $G = \frac{2s}{\overline{T}^2}$ efter n oberoende mätningar.

Exempel: Mätning av tyngdacceleration