

Korrekt och väl motiverad lösning på uppgifterna 1–5 ger 10 poäng vardera medan delfrågorna på uppgift 6 ger 4 poäng vardera. Totalt kan man få 70 poäng. Gränsen för godkänd är 35 poäng, dock finns det vissa minimikrav på uppgifterna 1–5 (18p) respektive uppgift 6 (7p).

Institutionens papper används både som kladdpapper och inskrivningspapper. Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Rödpenna får ej användas.

Tillåtna hjälpmedel: Matematiska och statistiska tabeller som ej innehåller statistiska formler, formelsamling matematisk statistik för bio- och kemitekniker, samt miniräknare.

Resultatet förs in i LADOK senast tisdag den 15 november.

Redovisa införda beteckningar; ange modeller, approximationer, hypoteser och slutsatser. Motivera alla antagande.

Skriv anonymkoden (eller namn) på omslaget och SAMTLIGA inlämnade papper.

1. En öltillverkare äger 3 olika bryggerier som alla tillverkar ungefär samma mängd öl. Bryggeri A tillverkar 70% pilsner och 30% mörkt öl, bryggeri B tillverkar 50% pilsner, 21% mörkt öl och 29% veteöl, och bryggeri C tillverkar 25% pilsner och resten mörkt öl.
  - (a) Hur stor andel av tillverkarens produktion består av mörkt öl? (5p)
  - (b) En lastpall med mörkt öl anländer från något av de tre bryggerierna till tillverkarens centrallager. Vad är sannolikheten att lastpallen kommer från bryggeri A? (5p)
2. Humle tillsätts vid ölbrygning för att ge ölet bitterhet. Bitterheten beror på andelen  $\alpha$ -syra i humlen. För tre olika humlesorter har man följande mätningar av andelen  $\alpha$ -syra (vikt-%)

Humlesort	Mätningar	Medelvärde	Varians
Amarillo	$n_1 = 5$	$\mu_1^* = 9.2$	$s_1^2 = 0.4$
Challenger	$n_2 = 4$	$\mu_2^* = 6.1$	$s_2^2 = 0.5$
Saaz	$n_3 = 7$	$\mu_3^* = 3.5$	$s_3^2 = 0.2$

- (a) Ansätt en lämplig normalfördelningsmodell under antagande om samma varians för alla tre humlesorterna. (2p)
  - (b) Skatta den gemensamma variansen. (2p)
  - (c) Konstruera ett 95%-konfidensintervall för andelen  $\alpha$ -syra i Challenger-humlen (d.v.s. för  $\mu_2$ ). (6p)
3. För att undersöka hur maltens ursprung och bryggprocessen påverkar mängden fermenterbart socker utfördes ett  $2^2$  faktoröversök. Man undersökte vanlig och ekologiskt odlad malt samt två olika bryggprocesser (gammal/ny). Mängden socker innan jäsnings mättes (grader Oechsle), högre halter tyder på bättre råvaror/process. För varje faktorkombination gjordes 3 försök och följande värden erhöles.

Faktorer		Medelvärde	Varians
(A)	(B)		
Ekologisk	Metod		
Nej	Gammal	$\mu_{11}^* = 48$	$s_{11}^2 = 4.15$
Ja	Gammal	$\mu_{21}^* = 52$	$s_{21}^2 = 0.93$
Nej	Ny	$\mu_{12}^* = 55$	$s_{12}^2 = 2.69$
Ja	Ny	$\mu_{22}^* = 54$	$s_{22}^2 = 4.21$

- (a) Skatta huvud- och samspelseffekter. (4p)
- (b) Avgör, under lämpliga antagande om oberoende och normalfördelning, vilka av effekterna i a) som är signifikanta på 1%-nivån. (4p)
- (c) Vilka slutsatser kan man dra från experimentet? (2p)
4. Vid tillverkning av ljust öl är ett "mjukt" vatten (låg halt av kalciumkarbonat) önskvärt. För att säkerställa vattenkvaliteten görs i början av varje vecka tre bestämningar av vattenhårdenheten ( $^{\circ}\text{dH}$ ) genom titrering. Mätfelen vid titreringen anses vara normalfördelade med okänd varians.
- (a) För en vecka erhöles följande mätvärden: 2.28, 2.67 och 4.29. Undersök, på signifikansnivån  $\alpha = 0.05$ , om vattenhårdenheten överstiger  $2^{\circ}\text{dH}$ . (5p)
- (b) Den nuvarande mätmetoden har svårt att upptäcka avvikelser och ledningen funderar på att istället använda en spektrometer. Spektrometern kan antas ha normalfördelade mätfel med känt  $\sigma$ , där dyrare utrustning har lägre  $\sigma$ . Vilken mätnoggrannhet behövs om man vill att testet ovan ska slå larm med 99.9% säkerhet om det sanna värdet är  $3^{\circ}\text{dH}$ ? (4p)
- (c) Vilken noggrannhet krävs i b) om man bara utför en mätning? (1p)
5. Vid ölbrygning blandas vatten och malt. Den resulterande blandningen behandlas sedan (på olika sätt) för att utvinna jäsningsbart socker från malten. Den ursprungliga mängden vatten kommer att minska, huvudsakligen på grund av absorption i malten och bortkokning. För att bedöma hur mycket vatten som försvinner under processen har man mätt:

$y_i$  Skillnaden i tillsatt vatten och slutlig mängd öl (100-tals l) för bryggomgång  $i$

$x_{1i}$  Mängden malt (100-tals kg)

$x_{2i}$  Koktiden (min)

En regressionsmodell ansattes för data

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i,$$

där  $\varepsilon_i$  är oberoende  $N(0, \sigma^2)$  och  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  är regressionskoefficienter. Baserat på data från 10 brygg-tillfällen har följande värden beräknats:

$$\beta^* = \begin{pmatrix} -0.1824 \\ 0.4269 \\ 0.0523 \end{pmatrix} \quad (X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 21.3 & 1.10 & -0.34 \\ 1.10 & 1.28 & -0.063 \\ -0.34 & -0.063 & 0.0070 \end{pmatrix} \quad Q_0 = 0.0411$$

- (a) Tolka parametrarna  $\beta_0, \beta_1$  och  $\beta_2$ . (2p)
- (b) Undersök, på 5%-nivån, vilka av regressionskoefficienterna som är signifikanta och tolka resultatet. (4p)
- (c) Vid en framtida brygning planerar man att använda 3.5 (100-tals kg) malt och 90 minuters koktiden. Använd modellen ovan för att konstruera ett lämpligt 95%-intervall för vattenåtgången vid detta brygg-tillfälle. (4p)

6. Teorifrågor. Ge koncisa svar på nedanstående frågor.

- (a) Givet två stokastiska variabler,  $X \in N(3, 0.5^2)$  och  $Y \in N(-2, 1^2)$ , vilken fördelning har  $Z = 2 \cdot X - 3 \cdot Y + 5$ ? (4p)
- (b) Antag att  $X$  är en diskret stokastisk variabel med sannolikhetsfunktion

$$p_X(k) = \begin{cases} c \cdot \frac{1}{2^k}, & k = 1, 2, 3, 4 \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$$

Bestäm  $c$  och  $E(X)$ . (4p)

- (c) Under lämpliga normalfördelningsantaganden utförs ett tvåsidigt hypotestest  $H_0: \mu = 3$  mot  $H_1: \mu \neq 3$  på signifikansnivån  $\alpha = 0.01$ .
- i) Skissera styrkefunktionens allmänna form och ange funktionens värde vid  $\mu = 3$ . Inga räkningar behöver göras! (2p)
- ii) Hur ändras styrkefunktionen om man istället gör det ensidiga testet  $H_0: \mu = 3$  mot  $H_1: \mu > 3$ . (2p)
- (d) Antag att  $X$  är  $Bin(8, p)$  och du vill testa  $H_0: p = 0.5$  mot  $H_1: p < 0.5$ . Givet en observation av  $x = 1$ , på vilken signifikansnivå kan  $H_0$  förkastas? (4p)
- (e) För att bestämma mängden fermenterbart socker i säd har halten av socker mättes i säd från tre olika lantbruk. Baserat på  $n_1 = 6$ ,  $n_2 = 3$  respektive  $n_3 = 4$  observationer från de tre gårdarna och lämpliga normalfördelningsantaganden erhålls skattningar av  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  och  $\mu_3$  samt en poolad variansskattning  $s_p^2 = 0.375$ .
- i) Hur många frihetsgrader har den poolade variansskattningen? (2p)
- ii) Konstruera ett 95%-konfidensintervall för den okända variansen,  $\sigma^2$ . (2p)

---

LYCKA TILL!